518
Ч—67
УДК 518 (075.8)

**Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская, О. П. Кваша,
Г. Л. Смирнов, Г. И. Феклисов**

Рецензенты: доц. Данелян Т. Я. и препод. Данилова А. Н.

Ч—67 **Численные** методы. Учебник для техникумов. М., «Высш. школа», 1976.

368 с. с ил.

На обороте тит. л. авт.: Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская, О. П Кваша [и др.]

В книге излагаются основы вычислительной математики и численные методы математического анализа в объеме, необходимом технику-программисту для работы на электронных вычислительных машинах.

Учебник написан в понятной и доступной для изучения форме. Теоретический материал сопровождается многочисленными примерами, а также упражнениями для *самостоятельной* работы.

Предназначается для учащихся средних специальных учебных заведений.

Ч $\frac{20203-240}{001(01)-76}$ 240—76 518

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III

Методы решения нелинейных уравнений

Глава IV

Интерполирование и экстраполирование

Глава V

Определение собственных чисел и собственных векторов матрицы

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Численные методы» является одной из основных дисциплин, необходимых для подготовки программистов среднего звена. Он имеет своей целью изучение учащимися основ и методики решения задач прикладной математики с приближенными вычислениями и численными методами математического анализа в объеме, необходимом технику-программисту для работы на электронных вычислительных машинах.

Настоящая книга — первая попытка создания учебника для изучения вычислительной математики в средних специальных учебных заведениях.

В результате изучения этого курса учащиеся должны знать численные методы, уметь применять их при решении задач и примеров, уметь составлять и применять вычислительные бланки и таблицы для дальнейшего программирования на ЭВМ.

По своему содержанию учебник разбит на два больших раздела: «Приближенные вычисления» и «Численные методы математического анализа». Первый раздел включает шесть глав: «Элементарная теория погрешностей»; «Методы решения систем линейных уравнений»; «Методы решения нелинейных уравнений»; «Интерполирование и экстраполирование»; «Определение собственных чисел и собственных векторов матрицы»; «Математическая обработка данных». Второй раздел содержит четыре главы: «Численное интегрирование и дифференцирование»; «Ряды Фурье»; «Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»; «Приближенное решение дифференциальных уравнений в частных производных».

Изучение численных методов немыслимо без решения значительного количества задач. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами. В конце каждой главы приводятся упражнения, решение которых должно способствовать лучшему усвоению излагаемого материала.

Работа над учебником проводилась в следующем порядке: главы I, III и IX написала О. П. Кваша, главы II и V — Н. С. Дубровская, главы IV, VI и VII — Н. И. Данилина, главу VIII — Г. Л. Смирнов, главу X — Г. И. Феклисов.

Авторы выражают свою признательность рецензентам Т. Я. Данелян и А. Д. Даниловой, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний, а также редактору книги А. М. Суходскому, чья работа во многом способствовала улучшению книги.

Авторы

Раздел первый
ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Глава I
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

§ 1.1. Точные и приближенные числа. Источники погрешностей. Классификация погрешностей

В процессе решения задачи вычислитель сталкивается с различными числами, которые могут быть точными или приближенными. Точные числа дают истинное значение величины числа, приближенные — близкое к истинному, причем степень близости определяется погрешностью вычисления.

Например, в утверждениях: «куб имеет 6 граней»; «на руке 5 пальцев»; «в классе 32 ученика»; «в книге 582 страницы» числа 6, 5, 32, 582 — точные. В утверждениях: «ширина дома 14,25 м»; «вес коробки 50 г»; «в лесу около 5000 деревьев» числа 14,25; 50; 5000 — приближенные. Измерение ширины дома производится измерительными средствами, которые сами могут быть неточными; кроме того, измеритель при измерении допускает ошибку (погрешность). При взвешивании коробки также допускается ошибка, так как автоматические весы не чувствительны к увеличению или уменьшению веса на 0,5 г. Произвести точно подсчет количества деревьев в лесу невозможно, так как некоторые деревья могут быть подсчитаны дважды; другие совсем не включались в счет; некоторые деревья были отнесены к кустарникам и исключены из счета, и, наоборот, кустарники включены в счет количества деревьев.

Во многих случаях жизни невозможно найти точное значение величины числа и вычислителю приходится довольствоваться его приближенным значением. Кроме того, очень часто вычислитель сознательно заменяет точное значение приближенным в целях упрощения вычислений.

Таким образом, *приближенным числом* a называется число, незначительно отличающееся от точного числа A и заменяющее последнее в вычислениях.

При решении той или иной задачи вручную или на вычислительной машине мы получаем числовой результат, который, как правило, не является точным, так как при постановке задачи и в ходе вычислений возникают *погрешности*. Поэтому любая задача, связанная с массовыми действиями над числами, может быть решена с той или иной степенью точности. В связи с этим при постановке задачи должна быть указана точность ее решения, т. е. задана погрешность, максимально допустимая в процессе всех вычислений.

Источниками погрешностей (ошибок) могут быть.

1) неточное отображение реальных процессов с помощью математики, в связи с чем рассматривается не сам процесс, а его идеализированная математическая модель. Не всегда реальные явления природы можно точно отобразить математически. Поэтому принимаются условия, упрощающие решение задачи, что вызывает появление погрешностей. Некоторые задачи невозможно решить в точной постановке и они могут заменяться другими задачами, близкими по результатам первым. При этом также возникают погрешности;

2) приближенное выражение величин, входящих в условие задачи, вследствие их неточного измерения. Это погрешности исходных данных, физических констант, чисел π, e и др.;

3) замена бесконечных процессов, пределами которых являются искомые величины, конечной последовательностью действий. Сюда относятся погрешности, образующиеся в результате обрыва какого-то бесконечного процесса на некотором этапе. Например, если в ряде

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

взять определенное количество членов и принять их сумму за $\sin x$, то мы, естественно, допускаем погрешность;

4) округление исходных данных, промежуточных или окончательных результатов, когда при вычислениях используется лишь конечное число цифр числа.

При отбрасывании младших разрядов числа имеет место погрешность. Пусть, например, число 0,7835478931 требуется записать в ячейку электронной цифровой вычислительной машины «Минск 1». Разрядная сетка машины допускает запись семизначного десятичного числа. Поэтому данное число нужно округлить так, чтобы в нем осталось не более семи знаков после запятой. Тогда округленное число примет следующий вид: 0,7835479;

5) кроме указанных выше случаев, погрешности могут появляться в результате действий над приближенными числами. В этом случае погрешности исходных данных в какой-то мере переносятся на результат вычислений.

Полная погрешность является результатом сложного взаимодействия всех видов погрешностей. При решении конкретных задач те или иные погрешности могут отсутствовать или мало влиять на образование полной погрешности. Однако для полного анализа погрешностей необходимо учитывать все их виды.

Во всех случаях полная погрешность не может превышать по своей абсолютной величине суммы абсолютных величин всех видов погрешностей, но обычно она редко достигает такой максимальной величины.

Таким образом, погрешности можно подразделить на три большие группы:

1) *исходные*, или *неустранимые*, к которым относятся погрешности, возникающие в результате приближенного описания реальных процессов и неточного задания исходных данных, а также погрешности,

связанные с действиями над приближенными числами. Эти погрешности проходят через все вычисления и являются неустранимыми;

2) погрешности *округления* (зарождающиеся), которые появляются в результате округления исходных данных, промежуточных и окончательных результатов;

3) *остаточные*, возникающие в результате замены бесконечных процессов конечной последовательностью действий.

Оценка погрешности может быть произведена: с помощью абсолютной погрешности; с помощью относительной погрешности; с помощью остаточного члена; с помощью статистических оценок.

При работе с приближенными величинами вычислитель должен уметь:

а) давать математические характеристики точности приближенных величин;

б) зная степень точности исходных данных, оценить степень точности результатов;

в) брать исходные данные с такой степенью точности, чтобы обеспечить заданную точность результата. В этом случае не следует слишком завышать точность исходных данных, чтобы избавить вычислителя от бесполезных расчетов;

г) уметь правильно построить вычислительный процесс, чтобы избавить его от тех выкладок, которые не окажут влияния на точные цифры результата.

§ 1.2. Абсолютная и относительная погрешности

В § 1.1 было дано определение приближенного числа: *приближенным числом* a называется число, незначительно отличающееся от точного числа A и заменяющее его в вычислениях.

Если $a < A$, то говорят, что число a является приближенным значением числа A *по недостатку*; если $a > A$ — приближенным значением *по избытку*.

Разность между точным числом A и его приближенным значением a составляет *ошибку*, или *погрешность*. Если $a < A$, то $A - a > 0$; если $a > A$, то $A - a < 0$.

Как правило, знак ошибки вычислителя не интересует, поэтому пользуются абсолютной ошибкой, или абсолютной погрешностью.

Абсолютная величина разности между точным числом A и его приближенным значением a называется *абсолютной погрешностью* приближенного числа a:

$$\Delta_a = |A - a|. \tag{1}$$

Здесь возможны два случая.

1. Точное число A нам известно. Тогда абсолютная погрешность приближенного числа легко находится по формуле (1).

Пример 1. Пусть $A = 784{,}2737$, $a = 784{,}274$; тогда абсолютная погрешность

$$\Delta_a = |A - a| = |784{,}2737 - 784{,}274| = 0{,}0003.$$

2. Точное число A нам неизвестно, тогда вычислить абсолютную погрешность по формуле (1) нельзя. Поэтому пользуются понятием границы абсолютной погрешности, удовлетворяющей неравенству

$$|A-a| \leqslant \Delta_a^*.$$

Граница абсолютной погрешности, т. е. число, заведомо превышающее абсолютную погрешность (или в крайнем случае равное ей), называется *предельной абсолютной погрешностью.*

Следовательно, если Δ_a^* — предельная абсолютная погрешность, то

$$\Delta_a = |A-a| \leqslant \Delta_a^*. \tag{2}$$

Значение точного числа A всегда заключено в следующих границах:

$$a-\Delta_a^* \leqslant A \leqslant a+\Delta_a^*. \tag{3}$$

Выражение $a - \Delta_a^*$ есть приближение числа A по недостатку, а $a + \Delta_a^*$ — приближение числа A по избытку. Значение числа A записывается так:

$$A = a \pm \Delta_a. \tag{3'}$$

Пример 2. Число 45,3 получено округлением. Точное значение числа неизвестно, однако, пользуясь правилами округления чисел, можно сказать, что абсолютная погрешность не превышает (меньше или равна) 0,05

Следовательно, границей абсолютной погрешности (предельной абсолютной погрешностью) можно считать 0,05. Записывают это так: 45,3 ($\pm$ 0,05). Скобки часто опускают, так что запись 45,3 $\pm$ 0,05 означает то же самое. Двойной знак $\pm$ означает, что отклонение приближенного значения числа от точного возможно в обе стороны. В качестве границы абсолютной погрешности берут по возможности наименьшее число.

Пример 3. При измерении длины отрезка оказалось, что ошибка, допущенная нами, не превышает 0,5 см; тем более она не превышает 1, 2 или 3 см. Каждое из этих чисел можно считать границей абсолютной погрешности. Однако нужно указать наименьшую из них, так как чем меньше граница абсолютной погрешности, тем точнее выражается приближенное значение числа. В записи приближенного числа, полученного в результате измерения, обычно отмечают его предельную абсолютную погрешность.

На практике часто применяют выражения типа: «с точностью до 0,01»; «с точностью до 1 см» и т. д. Это означает, что предельная абсолютная погрешность соответственно равна 0,01; 1 см и т. д.

Пример 4. Если длина отрезка l = 184 см измерена с точностью до 0,05 см, то пишут l = 184 см $\pm$ 0,05 см. Здесь предельная абсолютная погрешность Δ_l^* = 0,05 см, а точная величина длины l отрезка заключена в следующих границах: 183,95 см $\leqslant l \leqslant$ 184,05 см.

По абсолютной и предельной абсолютной погрешностям нельзя судить о том, хорошо или плохо произведено измерение.

Пример 5. Пусть при измерении книги и длины стола были получены результаты: l_1 = 28,4 $\pm$ 0,1 (см) и l_2 = 110,3 $\pm$ 0,1 (см). И в первом, и во втором случае предельная абсолютная погрешность составляет 0,1 см. Однако второе измерение было произведено более точно, чем первое.

Для того чтобы определить качество произведенных измерений, необходимо определить, какую долю составляет абсолютная или предельная абсолютная погрешность от измеряемой величины. В связи с этим вводится понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью δ_a приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ_a к модулю точного числа A $(A \neq 0)$, т. е.

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|}. \tag{4}$$

Отсюда

$$\Delta_a = |A|\delta_a. \tag{4'}$$

Число δ_a^*, заведомо превышающее относительную погрешность (или в крайнем случае равное ей), называется *предельной относительной погрешностью*:

$$\delta_a \leqslant \delta_a^*. \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) вытекает, что

$$\frac{\Delta_a}{|A|} \leqslant \delta_a^*; \quad \Delta_a \leqslant |A|\delta_a^*.$$

Из определения предельной абсолютной погрешности следует, что $\Delta_a \leqslant \Delta_a^*$. Тогда можно записать

$$\Delta_a^* = |A|\delta_a^* \tag{6}$$

и за предельную относительную погрешность приближенного числа a можно принять

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|A|}. \tag{7}$$

Учитывая, что A, как правило, неизвестно и что $A \approx a$, равенства (6) и (7) можно записать так:

$$\Delta_a = |a|\delta_a, \tag{6'}$$

$$\delta_a = \frac{\Delta_a^*}{|a|}. \tag{7'}$$

Возвращаясь к примеру 5, найдем предельные относительные погрешности измерения книги и стола.

$$\delta_{l_1}^* = \frac{0{,}1\ (\text{см})}{28{,}4\ (\text{см})} \approx 0{,}0035, \text{ или } 0{,}35\%;$$

$$\delta_{l_2}^* = \frac{0{,}1\ (\text{см})}{110{,}3\ (\text{см})} \approx 0{,}009, \text{ или } 0{,}09\%.$$

Таким образом, измерение стола было произведено намного точнее.

Очевидно, что как относительная погрешность, так и предельная относительная погрешность представляют собой отвлеченные числа, не зависящие от единиц, в которых выражаются результаты измерений.

Пример 6. Определить (в процентах) предельную относительную погрешность приближенного числа $a = 35,148 \pm 0,00074$

Решение. Воспользуемся формулой (7). Тогда

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|} = \frac{0,00074}{35,148} = 0,000021 \approx 0,0021\%.$$

Пример 7. Определить предельную абсолютную погрешность приближенного числа $a = 4,123$, если $\delta_a^* = 0,01\%$.

Решение. Запишем проценты в виде десятичной дроби и для определения предельной абсолютной погрешности воспользуемся формулой (6'); тогда

$$\Delta_a^* = |a|\,\delta_a^* = 4,123 \cdot 0,0001 = 0,00042.$$

Пример 8. Определить относительные погрешности чисел x и y, полученных при измерении углов Какой из результатов более точный?

x	Δ_x	y	Δ_y
50°30′10″	3″	45°15′36″	2″

Решение. Переведем заданные значения x и y в секунды и определим относительные погрешности измерений. Более точным измерением будет то, где относительная погрешность меньше. Имеем:

$$x = 181810'' \pm 3'',\quad \delta_x = 3/181810 \approx 0,000017 = 0,0017\%;$$
$$y = 162936'' \pm 2'',\quad \delta_y = 2/162936 \approx 0,000013 = 0,0013\%.$$

Измерение y произведено более точно.

Пример 9. Определить, какое равенство точнее: $a_1 = 13/19 \approx 0,684$ или $a_2 = \sqrt{52} \approx 7,21$?

Решение. Для нахождения предельных абсолютных погрешностей берем числа a_1 и a_2 с бо́льшим числом десятичных знаков: $13/19 \approx 0,68421$; $\sqrt{52} \approx$ $\approx 7,2111$. Определяем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$$\Delta_{a_1}^* = |0,68421 - 0,684| < 0,00022;\qquad \Delta_{a_2}^* = |7,2111 - 7,21| < 0,0012.$$

Находим предельные относительные погрешности:

$$\delta_{a_1} = \Delta_{a_1}^*/a_1 = 0,00022/0,684 \approx 0,00033 = 0,033\%;$$
$$\delta_{a_2}^* = \Delta_{a_2}^*/a_2 = 0,0012/7,21 \approx 0,00017 = 0,017\%.$$

Второе равенство является более точным, поскольку $\delta_{a_2}^* < \delta_{a_1}^*$.

§ 1.3. Десятичная запись приближенных чисел. Значащая цифра числа. Верная значащая цифра

Системой счисления, или *нумерацией*, называется совокупность правил, служащих для наименования и обозначения чисел. *Цифрами* называются условные знаки, используемые при обозначении чисел. При записи чисел в десятичной системе счисления пользуются десятью цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Десятичная система является *позиционной*: значение каждой цифры в числе зависит от ее положения среди других цифр этого числа. Так, в числе 7777, 77 имеются шесть цифр 7. Но все они имеют разные значения. Значение первой слева цифры — 7000, второй — 700, третьей — 70, четвертой — 7, пятой — 0,7, шестой — 0,07. Число 7777,77 является сокращенной записью следующей суммы:

$$7777{,}77 = 7 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}.$$

В десятичном числе единица каждого разряда равна десяти единицам предыдущего разряда. Вообще, всякое десятичное положительное число a может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots, \quad (1)$$

где α_i — цифры числа ($i = 1, 2, \ldots, n$), причем $\alpha_1 \neq 0$, а m — старший десятичный разряд числа a.

Значение единицы соответствующего разряда есть *цена* разряда. Так, цена первого (слева) разряда приближенного числа a есть 10^m, второго 10^{m-1}, ..., n-го 10^{m-n+1}.

При решении задач очень часто ставится условие: вычислить результат с точностью до одной десятой, одной сотой и т. д. Создается впечатление, что точность вычислений определяется числом десятичных знаков после запятой. Это неправильно, так как число десятичных знаков зависит от единицы, выбранной для измерения.

Определяющим точность вычисления является не число десятичных знаков, а число значащих цифр результата

Значащими цифрами приближенного числа a называются все цифры в его десятичном изображении, отличные от нуля, и нули, если они содержатся между значащими цифрами или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряда точности. Нули, стоящие левее первой отличной от нуля цифры, н е я в л я ю т с я значащими цифрами.

Пример 1. Числа 0,001405 и 5,0300 имеют соответственно 4 и 5 значащих цифр. Нуль, записанный в конце десятичной дроби, всегда значащая цифра (иначе его просто бы не писали). В данном примере в числе 5,0300 последний нуль показывает, что число задано с точностью до десятитысячных.

При написании целых чисел нули справа могут быть в одних случаях значащей цифрой, в других — незначащей. Если число 835 000 задано с точностью до единиц, то все три нуля справа — значащие цифры. Если же это число задано с точностью до сотен, то последние два нуля — незначащие цифры, а нуль в разряде сотен — значащая цифра.

Пример 2. Число 399 837 округлили до тысяч, получили 400 000. Нуль в разряде тысяч является значащей цифрой, так как стоит в разряде точности. Все остальные цифры стоящие левее нуля, находящегося в разряде точности, являются также значащими. Последние три нуля — незначащие цифры.

Для того чтобы по записи числа можно было бы определить, являются ли крайние правые нули значащими или нет, рекомендуется числа представлять в виде произведения двух сомножителей, например: $400 \cdot 10^3$, или $40{,}0 \cdot 10^4$, или $4{,}00 \cdot 10^5$. Последняя форма записи, когда запятая поставлена после первой слева значащей цифры, называется *нормальной* и является предпочтительной. В таком представлении количество значащих цифр числа равно количеству значащих цифр первого сомножителя.

Однако точность приближенного числа зависит не от того, сколько в этом числе значащих цифр, а от того, сколько значащих цифр заслуживают доверия, т. е. от количества верных значащих цифр.

Приближенное число $a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_n \times \times 10^{m-n+1} + \ldots$ содержит *n верных значащих цифр в узком смысле*, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы десятичного разряда, выражаемого n-й значащей цифрой, считая слева направо, т. е. если выполняется неравенство

$$\Delta_a \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}. \qquad (2)$$

Если это неравенство не выполняется, то цифру α_n называют *сомнительной*. Очевидно, что если цифра α_n — верная, то и все предшествующие ей цифры тоже верные. Таким образом, среди верных цифр всегда можно указать последнюю.

Пример 3 Для точного числа $A = 17{,}976$ число $a = 17{,}98$ является приближением с четырьмя верными знаками в узком смысле, так как $\Delta_a = |A - a| = 0{,}004 < 0{,}5 \cdot 0{,}01$.

В математических таблицах все помещенные значащие цифры — верные. Так, в известных таблицах В. М. Брадиса значения синуса даны с абсолютной погрешностью, не превышающей $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, т. е. с четырьмя верными значащими цифрами в узком смысле. В последнее время стали использоваться таблицы (таблицы различных физических величин, экспериментально составленные таблицы), в которых абсолютные погрешности чисел не превосходят единицы последнего разряда.

Приближенное число

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots$$

содержит *n верных значащих цифр в широком смысле*, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы десятичного разряда, выражаемого n-й значащей цифрой, считая слева направо, т. е. если выполняется неравенство

$$\Delta_a \leqslant 1 \cdot 10^{m-n+1}. \qquad (3)$$

Пример 4. Для точного числа $A = 17{,}976$ число $a = 17{,}97$ является приближенным с четырьмя верными цифрами в широком смысле, так как $\Delta_a = |A - a| = 0{,}006 < 1 \cdot 0{,}01$.

Неравенства (2) и (3) можно записать в виде $\Delta_a \leqslant \omega \cdot 10^{m-n+1}$, где параметр ω, принимающий значения $0{,}5 \leqslant \omega \leqslant 1$, указывает на характер проводимых вычислений. Если приближенные числа появляются в результате вычислений по формулам с точными значениями исходных данных (например, при составлении таблиц трансцендентных функций), иными словами, когда можно практически достигнуть любой заданной точности, то выгоднее брать меньшее значение параметра ω, т. е. $\omega = 0,5$.

Если же приближенные числа получаются в результате вычислений с недостаточно точными исходными данными, то параметр ω принимается равным единице. В этом случае малые значения параметра ω связаны с необходимостью производить округления, которые снижают точность результатов и поэтому являются невыгодными. Если указано, что цифры приближенного числа верные и $\omega = 0,5$, то это означает, что цифры числа верны в узком смысле; если же $\omega = 1$, то в широком смысле.

Пример 5. Сколько верных значащих цифр содержит приближенное число $a = 85,267 \pm 0,0084$: 1) в узком смысле; 2) в широком смысле?

Решение. 1) Из условия видно, что погрешность $\Delta_a = 0,0084 < 0,05$. Следовательно, верными в узком смысле будут цифры 8, 5, 2.

2) Поскольку $\Delta_a = 0,0084 < 0,01$, верными в широком смысле будут цифры 8, 5, 2, 6

Пример 6. Определить предельные абсолютные погрешности приближенных чисел $a = 96,387$ и $b = 9,32$, если они содержат только верные цифры в узком и широком смысле соответственно.

Решение. 1) Так как для числа $a = 96,387$ последняя цифра 7, стоящая в разряде тысячных долей, является верной значащей цифрой в узком смысле, то $\Delta_a \leqslant 0,5 \cdot 0,001$, т. е. $\Delta_a \leqslant 0,0005$, или $\Delta_a^* = 0,0005$. Тогда число a можно записать так: $96,387 \pm 0,0005$.

2) Последняя цифра приближенного числа $b = 9,32$ стоит в разряде сотых долей. Так как это число содержит верные цифры в широком смысле, то, следовательно, $\Delta_b \leqslant 1 \cdot 0,01$, т. е. $\Delta_b \leqslant 0,01$, или $\Delta_b^* = 0,01$. Число b можно записать так: $9,32 \pm 0,01$.

§ 1.4. Округление чисел

В приближенных вычислениях часто приходится округлять числа как приближенные, так и точные, т. е. отбрасывать одну или несколько последних цифр и при необходимости заменять их нулями. При округлении числа мы заменяем его приближенным числом с меньшим количеством значащих цифр, в результате чего возникает погрешность округления. Чтобы эта погрешность была минимальной, нужно придерживаться некоторых правил округления (по дополнению).

Правило I. *Если первая слева из отбрасываемых цифр больше* 5, *то последняя из сохраняемых цифр усиливается, т.е. увеличивается на единицу. Усиление производится и тогда, когда первая слева из отбрасываемых цифр равна* 5, *а за ней следуют отличные от нуля цифры.*

Пример 1. Округляя до десятых долей число 73,473, получим 73,5. Последняя из оставшихся цифр усилена, так как $7 > 5$.

Правило II. *Если первая из отброшенных цифр меньше 5, то последняя из оставшихся цифр не усиливается, т. е. остается без изменения.*

Пример 2. Округляя до сотых долей число 73,473, получим 73,47.

П р а в и л о III. *Если первая слева из отброшенных цифр равна 5 и за ней не следуют отличные от нуля цифры, то последняя оставшаяся цифра усиливается, если она нечетная, и остается без изменения, если она четная* (п р а в и л о   ч е т н о й   ц и ф р ы).

Пример 3. Округляя число 5,785 до сотых долей, получаем 5,78. Усиления не делаем, так как последняя сохраняемая цифра 8 — четная. Округляя число 5,775 до второго десятичного знака, имеем 5,78. Последняя сохраняемая цифра 7 увеличивается на единицу, поскольку она нечетная.

При применении правила III к округлению одного числа мы фактически не увеличиваем точность вычислений, однако при многочисленных округлениях избыточные числа встречаются примерно так же часто, как и недостаточные. Происходит взаимная компенсация погрешностей, результат оказывается более точным.

Таким образом, при применении выше рассмотренных правил округления *абсолютная погрешность округления не превосходит половины единицы разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.*

Если точное число A округляется до n значащих цифр по правилу дополнения, то получаемое приближенное число a имеет абсолютную погрешность, равную погрешности округления. В этом случае приближенное число a имеет n верных значащих цифр в узком смысле.

Пример 4. Округляя число $A = 26{,}837$ до трех значащих цифр, получим $a = 26{,}8$, откуда

$$\Delta_a = |A - a| = |26{,}837 - 26{,}8| = 0{,}037 < 0{,}05,$$

т. е. число a имеет три верные значащие цифры в узком смысле.

При округлении приближенного числа a_1 получаем новое приближенное число a_2, абсолютная погрешность которого складывается из абсолютной погрешности первоначального числа a_1 и погрешности округления, т. е.

$$\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{\text{окр}}. \tag{1}$$

Пример 5. Округлить сомнительные цифры числа $a_1 = 34\,124$ ($\pm$ 0,021). Определить абсолютную погрешность результата.

Р е ш е н и е. Приближенное число a_1 имеет три верные цифры в узком смысле. 3, 4, 1, так как $\Delta_{a_1} = 0{,}021 < 0{,}05$ Применяя правила округления, найдем приближенное значение a_2, сохранив десятые доли: $a_2 = 34{,}1$. Теперь получаем

$$\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{\text{окр}} = 0{,}021 + 0{,}024 = 0{,}045 < 0{,}05.$$

Таким образом, все значащие цифры числа a_2 верные (в узком смысле), т. е. $a_2 = 34{,}1$.

Однако при округлении приближенного числа a_1, имеющего n верных значащих цифр (в узком смысле), до n значащих цифр может оказаться, что округленное число a_2 будет иметь n верных значащих цифр в широком смысле.

Пример 6. Приближенное число $a_1 = 15{,}3654 \pm 0{,}0018$ имеет четыре верные значащие цифры в узком смысле (1, 5, 3, 6), так как $\Delta_{a_1} = 0{,}0018 < 0{,}005$. При округлении до четырех значащих цифр получим $a_2 = 15{,}37$ и

$$\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{\text{окр}} = 0{,}0018 + 0{,}0046 = 0{,}0064.$$

Очевидно, что $0{,}005 < 0{,}0064 < 0{,}01$. Следовательно, число $15{,}37 \pm 0{,}0064$ имеет четыре верные цифры в широком смысле.

Пример 7. Округлить сомнительные цифры числа $a_1 = 26{,}7245 \pm 0{,}0026$, оставив верные знаки в узком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.

Решение. По условию $\Delta_{a_1} = 0{,}0026 < 0{,}005$, следовательно, в числе 26,7245 верными в узком смысле являются цифры 2, 6, 7, 2. Используя правила округления, найдем приближенное значение a_2, сохранив сотые доли: $a_2 = 26{,}72$. Далее, имеем

$$\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{\text{окр}} = 0{,}0026 + 0{,}0045 = 0{,}0071.$$

Полученная погрешность больше 0,005 $(0{,}005 < 0{,}0071)$, поэтому уменьшим число цифр в приближенном числе до трех: $a_3 = 26{,}7$. Находим

$$\Delta_{a_3} = \Delta_{a_1} + \Delta_{\text{окр}} = 0{,}0026 + 0{,}0245 = 0{,}0271,$$

т. е. $\Delta_{a_3} < 0{,}05$. Следовательно, оставшиеся три цифры верны в узком смысле.

Пример 8. Округлить сомнительные цифры числа $a_1 = 22{,}7314$, оставив верные знаки в узком смысле. Определить абсолютную погрешность числа, если $\delta_{a_1} = 0{,}2\%$.

Решение. Запишем δ_{a_1} в виде десятичной дроби: $\delta_{a_1} = 0{,}002$ и определим Δ_{a_1} по формуле (6′) § 1.2:

$$\Delta_{a_1} = |\, a_1 \,|\, \delta_{a_1} = 22{,}7314 \cdot 0{,}002 = 0{,}0455.$$

Так как $\Delta_{a_1} = 0{,}0455 < 0{,}05$, то верными в этом числе будут три цифры: 2, 2, 7. Округлим число 22,7314, сохранив в нем десятые доли: $a_2 = 22{,}7$. Тогда

$$\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{\text{окр}} = 0{,}0455 + 0{,}0314 = 0{,}0769.$$

Поскольку полученная погрешность больше 0,05, уменьшаем число цифр в приближенном числе до двух: $a_3 = 23$; тогда

$$\Delta_{a_3} = \Delta_{a_1} + \Delta_{\text{окр}} = 0{,}0455 + 0{,}2686 = 0{,}3141,$$

т. е. $\Delta_{a_3} < 0{,}5$. Таким образом, в полученном округленном числе 23 обе цифры являются верными в узком смысле.

Пример 9. Округлить сомнительные цифры числа $a_1 = 5{,}273$, оставив верные знаки в широком смысле. Определить абсолютную погрешность числа, если $\delta_{a_1} = 0{,}1\%$.

Решение. Находим

$$\Delta_{a_1} = |\, a_1 \,|\, \delta_{a_1} = 5{,}273 \cdot 0{,}001 = 0{,}0053.$$

В числе a_1 верными в широком смысле являются три цифры (5, 2, 7), поэтому округляем его до трех значащих цифр: $a_2 = 5{,}27$; отсюда

$$\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{\text{окр}} = 0{,}0053 + 0{,}003 = 0{,}0083 < 0{,}01.$$

Следовательно, округленное число 5,27 имеет три верные цифры в широком смысле.

§ 1.5. Связь между числом верных знаков и погрешностью числа

Абсолютная погрешность приближенного числа связана с числом верных знаков соотношением

$$\Delta_a \leqslant \omega \cdot 10^{m-n+1}, \tag{1}$$

что следует из определения верной значащей цифры.

В какой же зависимости от числа верных значащих цифр находится относительная погрешность?

Запишем приближенное число

$$a=\alpha_1\cdot 10^m+\alpha_2\cdot 10^{m-1}+\ \dots\ +\alpha_n\cdot 10^{m-n+1}+\ \dots \qquad (2)$$

$(\alpha_1\neq 0)$, все цифры которого при данном выборе параметра ω верные $(0{,}5\leqslant\omega\leqslant 1)$.

Разделив обе части неравенства (1) на $|a|$, получим

$$\frac{\Delta_a}{|a|}\leqslant\frac{\omega\cdot 10^{m-n+1}}{|\alpha_1\cdot 10^m+\alpha_2\cdot 10^{m-1}+\ \dots\ +\alpha_n\cdot 10^{m-n+1}+\ \dots|}\leqslant\frac{\omega\cdot 10^{m-n+1}}{\alpha_1\cdot 10^m}=$$

$$=\frac{\omega\cdot 10^m}{\alpha_1\cdot 10^m\cdot 10^{n-1}}=\frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^{n-1}},$$

т. е.

$$\delta_a\leqslant\frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^{n-1}}, \qquad (3)$$

где α_1 — первая значащая цифра числа; n — количество верных значащих цифр.

За предельную относительную погрешность можно принять

$$\delta_a^*=\frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^{n-1}}. \qquad (4)$$

Пример 1. Какова предельная относительная погрешность приближенного числа $a=4{,}176$, если оно имеет только верные цифры в узком смысле?

Решение. Так как в числе 4,176 все четыре цифры верны в узком смысле, то выбираем $\omega=0{,}5$. По формуле (4) находим предельную относительную погрешность

$$\delta_a^*=\frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^{n-1}}=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 10^3}=0{,}000125=0{,}0125\%.$$

Заметим, что предельную относительную погрешность числа a можно найти, пользуясь формулой $\delta_a^*=\Delta_a^*/|a|$. Так как в данном числе a все цифры верны в узком смысле, то $\Delta_a=0{,}0005$. Тогда

$$\delta_a^*=0{,}0005/4{,}176\simeq 0{,}000120=0{,}0120\%.$$

Как видим, разница невелика, но применение формулы (4) несколько упрощает вычисление δ_a^*.

Пример 2. Какова предельная относительная погрешность числа $a=14{,}278$, если оно имеет только верные цифры в широком смысле?

Решение. Так как все пять цифр числа верны в широком смысле, то $\omega=1$. Тогда

$$\delta_a^*=\frac{\omega}{\alpha_1\cdot 10^4}=\frac{1}{1\cdot 10^4}=0{,}0001=0{,}01\%.$$

Пример 3. Со сколькими верными десятичными знаками в узком смысле надо взять $\sqrt{18}$, чтобы погрешность не превышала $0{,}1\%$?

Решение. Здесь $a=\sqrt{18}\approx 4,\dots$; $\delta_a^*\leqslant 0{,}1\%$, т. е. $\delta_a^*\leqslant 0{,}001$; $\omega=0{,}5$, имеем $\delta_a^*=\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 10^{n-1}}\leqslant 0{,}001$, откуда

$$125\leqslant 10^{n-1};\quad 1{,}25\cdot 10^2\leqslant n-1;\quad \lg 1{,}25+2\leqslant n-1;\quad n\geqslant 3+\lg 1{,}25,$$

т. е. $n\geqslant 3$, где n — наименьший целочисленный аргумент. Для большей точности можно принять $n=4$.

§ 1.6. Погрешности суммы и разности

Теорема. *Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.*

Доказательство. Пусть $A = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ — сумма точных чисел, причем величины X_i могут быть любого знака; $a = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ — сумма приближенных значений этих чисел. Абсолютные погрешности их соответственно равны $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$. Вычитая из точного значения суммы приближенное ее значение, имеем

$$A - a = (X_1 - x_1) + (X_2 - x_2) + \ldots + (X_n - x_n).$$

Переходя к модулям, получим

$$|A - a| \leqslant |X_1 - x_1| + |X_2 - x_2| + \ldots + |X_n - x_n|.$$

Следовательно,

$$\Delta_a \leqslant \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \ldots + \Delta_{x_n}, \qquad (1)$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.*

Действительно, имеем $\Delta_{x_1} \leqslant \Delta^*_{x_1}$, $\Delta_{x_2} \leqslant \Delta^*_{x_2}$, ..., $\Delta_{x_n} \leqslant \Delta^*_{x_n}$. Подставляя значения предельных абсолютных погрешностей в неравенство (1), мы еще более усилим его:

$$\Delta_a \leqslant \Delta^*_{x_1} + \Delta^*_{x_2} + \ldots + \Delta^*_{x_n},$$

или

$$\Delta_a = \Delta^*_{x_1} + \Delta^*_{x_2} + \ldots + \Delta^*_{x_n}. \qquad (2)$$

Из последней формулы следует, что предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых, так как увеличение точности за счет остальных слагаемых невозможно. Поэтому, чтобы не производить лишних вычислений, не следует сохранять лишние знаки и в более точных слагаемых.

При сложении чисел различной абсолютной точности рекомендуется поступать следующим образом:

1) выделить число (или числа) наименьшей абсолютной точности (т. е. число, имеющее наибольшую абсолютную погрешность);

2) наиболее точные числа округлить таким образом, чтобы сохранить в них на один знак больше, чем в выделенном числе (т. е. оставить один запасной знак);

3) произвести сложение, учитывая все сохраненные знаки;

4) полученный результат округлить на один знак.

Пример 1. Сложить несколько приближенных чисел:

$$a = 0{,}1732 + 17{,}45 + 0{,}000333 + 204{,}4 + 7{,}25 + \\ + 144{,}2 + 0{,}0112 + 0{,}634 + 0{,}0771.$$

В каждом из приведенных чисел верны все значащие цифры (в широком смысле).

Р е ш е н и е. Выделяем два числа наименьшей точности: 204,4 и 144,2. Оба они верны с точностью до 0,1. Следовательно, остальные числа следует округлить с точностью до 0,01. Округлим и сложим эти числа:

0,1	7
17,4	5
0,0	0
204,4	
7,2	5
144,2	
0,0	1
0,6	3
0,0	8
374,1	9

Округляя полученное число до 0,1, окончательно получим $a = 374{,}2$.

Оценим точность результата. Для этого найдем полную погрешность, которая состоит из трех слагаемых:

1) суммы предельных погрешностей исходных данных

$$\Delta_1 = 0{,}0001 + 0{,}01 + 0{,}000001 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}0001 + 0{,}001 + 0{,}0001 = 0{,}221301 < 0{,}222;$$

2) абсолютной величины суммы ошибок (с учетом их знаков) округления слагаемых

$$\Delta_2 = |0{,}0032 + 0{,}000333 + 0{,}0012 + 0{,}004 - 0{,}0029| = 0{,}005833 < 0{,}006;$$

3) заключительной погрешности округления результата $\Delta_3 = 0{,}010$.

Следовательно,

$$\Delta_a = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \leqslant 0{,}222 + 0{,}006 + 0{,}010 = 0{,}238 < 0{,}3.$$

Искомая сумма есть $374{,}2 \pm 0{,}3$.

Таким образом, убеждаемся, что окончательная погрешность не меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых (действительно, $0{,}3 > 0{,}1$).

Определим предельную относительную погрешность суммы нескольких приближенных чисел.

Здесь следует различать два случая: 1) все слагаемые имеют одинаковые знаки; 2) слагаемые имеют разные знаки.

Рассмотрим п е р в ы й с л у ч а й. Пусть $a = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где приближенные числа x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) имеют соответственно предельные абсолютные погрешности $\Delta_{x_1}^*, \Delta_{x_2}^*, \ldots, \Delta_{x_n}^*$. Положим для простоты $x_i > 0$; тогда

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{a}. \tag{3}$$

Но, согласно формуле (2)

$$\Delta_a^* = \Delta_{x_1}^* + \Delta_{x}^* + \ldots + \Delta_{x_n}^*.$$

Подставляя Δ_a^* в формулу (3) и заменяя a суммой $\sum_{i=1}^{n} x_i$, получим

$$\delta_a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i}^*}{\sum_{i=1}^{n} x_i}. \tag{3'}$$

Так как $\Delta_{x_i}^* = x_i \delta_{x_i}^*$, то

$$\delta_a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{x_i}^*}{\sum_{i=1}^{n} x_i}. \tag{3''}$$

Обозначим через $\delta_{\max}^*$ и $\delta_{\min}^*$ наибольшее и наименьшее из чисел $\delta_{x_i}^*$; тогда имеем

$$\delta_a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{x_i}^*}{\sum_{i=1}^{n} x_i} < \frac{\delta_{\max}^* \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \delta_{\max}^*.$$

Аналогично можно получить, что $\delta_a^* > \delta_{\min}^*$. Таким образом,

$$\delta_{\min}^* < \delta_a^* < \delta_{\max}^* . \tag{4}$$

Следовательно, *предельная относительная погрешность суммы слагаемых одного знака заключена между наименьшей и наибольшей предельными относительными погрешностями слагаемых.*

Пример 2. Оценить относительную погрешность суммы чисел в примере 1 и сравнить ее с относительными погрешностями слагаемых.

Решение. Относительная погрешность суммы a такова:

$$\delta_a^* = 0{,}3/374{,}2 = 0{,}0008 = 0{,}08\%.$$

Предельные относительные погрешности слагаемых составляют соответственно

$$1/1732 = 0{,}058\%; \quad 1/1745 = 0{,}057\%; \quad 1/333 = 0{,}3\%;$$

$$1/2044 = 0{,}049\%; \quad 1/725 = 0{,}14\%; \quad 1/1442 = 0{,}069\%;$$

$$1/112 = 0{,}89\%; \quad 1/634 = 0{,}16\%; \quad 1/771 = 0{,}13\%;$$

$$\delta_{\max}^* = 0{,}89\%; \quad \delta_{\min} = 0{,}049\%; \quad \delta_a^* = 0{,}08\%.$$

Итак, $0{,}049 < 0{,}08 < 0{,}89$, т. е. предельная относительная погрешность заключена между наименьшей и наибольшей предельными относительными погрешностями слагаемых.

Рассмотрим второй случай (разность). Пусть $x > 0$, $y > 0$ и $a = x - y$. Тогда, сохраняя прежние обозначения, получим

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{\Delta_x + \Delta_y^*}{|x - y|}. \tag{5}$$

Таким образом, если числа x и y мало отличаются друг от друга, то даже при малых погрешностях Δ_x^* и Δ_y^* величина предельной относительной погрешности разности может оказаться значительной.

Пример 3. Пусть $x = 5{,}125$, $y = 5{,}135$; здесь $\Delta_x^* = 0{,}0005$, $\Delta_y^* = 0{,}0005$, $\delta_x^* \approx \delta_y^* \approx 0{,}01\%$. Предельная же относительная погрешность разности $a = x - y$ равна

$$\delta_a^* = \frac{0{,}0005+0{,}0005}{0{,}01} \cdot 100 = 10\%.$$

Очевидно, что в результате вычитания двух близких чисел может произойти большая потеря точности. Чтобы не допустить этого, следует попытаться так преобразовать вычислительную схему, чтобы малые разности величин вычислялись непосредственно.

Пример 4. Найти разность $u = \sqrt{6{,}27} - \sqrt{6{,}26}$ с тремя верными знаками.

Решение. Возьмем $\sqrt{6{,}27}$ и $\sqrt{6{,}26}$ с достаточно большим количеством верных значащих цифр, так как при вычитании близких друг другу чисел первые несколько цифр могут пропасть:

$$\sqrt{6{,}27} = 2{,}503997\ldots; \quad \sqrt{6{,}26} = 2{,}501999\ldots .$$

Получим

$$u = \sqrt{6{,}27} - \sqrt{6{,}26} = 0{,}001998 \approx 0{,}00200 = 2{,}00 \cdot 10^{-3}.$$

Однако вычислительную схему можно изменить и взять квадратные корни только с тремя верными знаками:

$$u = \sqrt{6{,}27} - \sqrt{6{,}26} = \frac{(\sqrt{6{,}27} - \sqrt{6{,}26})(\sqrt{6{,}27} + \sqrt{6{,}26})}{\sqrt{6{,}27} + \sqrt{6{,}26}} = \frac{6{,}27 - 6{,}26}{\sqrt{6{,}27} + \sqrt{6{,}26}}.$$

Это выражение, кроме разности данных чисел, никаких других разностей не содержит. В результате получаем

$$u = \frac{0{,}01}{2{,}50 + 2{,}50} = \frac{0{,}01}{5{,}00} = 0{,}00200 = 2{,}00 \cdot 10^{-3},$$

как и прежде.

Пример 5. Вычислить значение функции $y = 1 - \cos x$ для следующих значений аргумента: 1) $x = 80°$; 2) $x = 1°$. Подсчитать предельные абсолютную и относительную погрешности результата.

Решение. 1) По «Четырехзначным математическим таблицам» Брадиса находим: $\cos 80° = 0{,}1736$ и поскольку все цифры этого числа верны в узком смысле, то $\Delta_{\cos 80°} = 0{,}00005$. Тогда $y_1 = 1 - \cos 80° = 1 - 0{,}1736 = 0{,}8264$ и $\Delta_{y_1}^* = 0{,}00005$ (из точного числа, равного единице, вычитается приближенное число с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,00005). Следовательно,

$$\delta_{y_1} = 0{,}00005/0{,}8264 = 0{,}00006 = 0{,}006\%.$$

2) Имеем $\cos 1° = 0{,}9998$; $\Delta_{\cos 1°}^* = 0{,}00005$; $y_2 = 1 - \cos 1° = 1 - 0{,}9998 = 0{,}0002$; $\Delta_{y_2}^* = 0{,}00005$; значит,

$$\delta_{y_2} = 0{,}00005/0{,}0002 = 0{,}25 = 25\%.$$

Из приведенных примеров видно, что для малых значений аргумента непосредственный расчет по формуле $y = 1 - \cos x$ дает относительную погрешность порядка 25%. Для $x = 80°$ такая погрешность составляет всего лишь 0,006%.

Изменим вычислительную схему и для вычисления значений функции $y = 1 - \cos x$ при малых значениях аргумента воспользуемся формулой $y = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$. Обозначим $a = \sin 0°30' = 0{,}0087$. Тогда $\Delta_a = 0{,}00005$; $\delta_a^* = 0{,}5/87 = 0{,}58\%$. Но

$$y_2 = 1 - \cos x = 1 - \cos 1° = 2\sin^2 0°30' = 2 \cdot 0{,}0087^2 = 0{,}000151;$$

$$\delta_{y_2}^* = \delta_{a^2}^* = 2\delta_a^* = 1{,}16\%.$$

(см. ниже, § 1.7). В результате получаем

$$\Delta_{y2}^* = y_2\delta_{y2}^* = 0{,}000151 \cdot 0{,}0116 = 0{,}0000018$$

(а ранее имели $\Delta_a^* = 0{,}00005$). Таким образом, простое преобразование расчетной формулы позволило по тем же четырехзначным таблицам получить бо́льшую точность.

Однако преобразовать вычислительную схему не всегда возможно. Поэтому при вычитании близких друг другу чисел необходимо их брать с достаточным числом запасных верных знаков (если это возможно). Если известно, что первые m значащих цифр могут пропасть, а результат нужно получить с n верными значащими цифрами, то исходные данные необходимо брать с $m + n$ верными значащими цифрами, как было сделано в примере 4.

§ 1.7. Погрешность произведения. Число верных знаков произведения

Ранее были получены формулы для определения абсолютной погрешности алгебраической суммы нескольких приближенных чисел.

Для нахождения абсолютной погрешности произведения $u = x_1 x_2 \ldots x_n$ и частного $u = x/y$ также можно получить соответствующие формулы, однако они являются более сложными, и поэтому абсолютную погрешность произведения и частного удобно находить через относительную погрешность, используя формулу $\Delta_u = |u|\delta_u$. В связи с этим выведем формулу для определения относительной погрешности произведения.

Погрешность произведения. Теорема. *Относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел.*

Доказательство. Пусть

$$u = x_1 x_2 \ldots x_n. \tag{1}$$

Для определенности положим, что приближенные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны и имеют абсолютные погрешности $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$ соответственно.

Для оценки погрешности произведения прологарифмируем выражение (1):

$$\ln u = \ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n. \tag{2}$$

Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел (2) не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых, т. е.

$$\Delta_{\ln u} \leqslant \Delta_{\ln x_1} + \Delta_{\ln x_2} + \ldots + \Delta_{\ln x_n}. \tag{3}$$

Используя приближенную формулу

$$\Delta_{\ln x} \approx |d \ln x| = \frac{\Delta_x}{|x|}, \tag{4}$$

получим

$$\frac{\Delta_u}{u} \leqslant \frac{\Delta_{x_1}}{x_1} + \frac{\Delta_{x_2}}{x_2} + \ldots + \frac{\Delta_{x_n}}{x_n}, \tag{5}$$

откуда

$$\delta_u \leqslant \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \ldots + \delta_{x_n}. \tag{6}$$

Заметим, что знак модуля в выражении (5) опущен, так как было принято, что $x_i > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Формула (6), очевидно, остается верной и в том случае, если x_i имеют разные знаки.

Следствие. *Предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.*

Действительно,

$$\delta^*_{x_1} \geqslant \delta_{x_1}, \quad \delta^*_{x_2} \geqslant \delta_{x_2}, \ \ldots, \ \delta^*_{x_n} \geqslant \delta_{x_n}. \tag{7}$$

Подставляя значения предельных относительных погрешностей в неравенство (6), мы еще более усилим его, т. е.

$$\delta_u \leqslant \delta^*_{x_1} + \delta^*_{x_2} + \ldots + \delta_{x_n},$$

или

$$\delta^*_u = \delta^*_{x_1} + \delta^*_{x_2} + \ldots + \delta^*_{x_n}. \tag{8}$$

Если все сомножители, кроме одного, являются точными числами, то из формулы (8) следует, что предельная относительная погрешность произведения совпадает с предельной относительной погрешностью приближенного сомножителя. Таким образом, если приближенным числом является лишь значение множителя x_i, то

$$\delta^*_u = \delta^*_{x_i}. \tag{9}$$

Замечание. При умножении приближенного числа x на точный сомножитель k предельная относительная погрешность произведения равна предельной относительной погрешности приближенного числа x, а предельная абсолютная погрешность в $|k|$ раз больше предельной абсолютной погрешности приближенного сомножителя.

Действительно, пусть $u = kx$, где k— точный сомножитель, отличный от нуля. Тогда согласно формуле (9) имеем $\delta_u = \delta_x^*$, или

$$\Delta_u^* = |u|\,\delta_u^* = |u|\,\delta_x^* = |kx|\,\frac{\Delta_x^*}{|x|} = |k|\,\Delta_x^*,$$

т. е.

$$\Delta_u^* = |k|\,\Delta_x^*. \qquad (10)$$

Зная предельную относительную погрешность δ_u^* произведения u, можно определить его абсолютную погрешность по формуле $\Delta_u^* = |u|\;\delta_u^*$.

Из формулы (8) видно, что предельная относительная погрешность произведения не может быть меньше, чем предельная относительная погрешность наименее точного из сомножителей. Поэтому при перемножении чисел разной относительной точности (т. е. имеющих разное число верных значащих цифр) выполняют следующие действия по вычислению произведения:

1) выделяют число с наименьшим количеством верных значащих цифр (наименее точное число);

2) округляют оставшиеся сомножители таким образом, чтобы они содержали на одну значащую цифру больше, чем количество верных значащих цифр в выделенном числе;

3) сохраняют в произведении столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет наименее точный из сомножителей (выделенное число).

Пример 1. Найти произведение приближенных чисел $x_1 = 3{,}6$ и $x_2 = 84{,}489$, все цифры которых верны

Решение. В первом числе две верные значащие цифры, а во втором — пять. Поэтому второе число округляем до трех значащих цифр. После округления имеем $x_1 = 3{,}6$; $x_2 = 84{,}5$. Отсюда

$$x_1x_2 = 3{,}6 \cdot 84{,}5 = 294{,}20 \approx 2{,}9 \cdot 10^2.$$

В результате оставлены две значащие цифры, т. е. столько, сколько их имел сомножитель с наименьшим количеством верных значащих цифр.

Пример 2. Определить произведение u приближенных чисел $x_1 = 12{,}4$ и $x_2 = 65{,}54$ и число верных знаков в нем, если все написанные цифры сомножителей верны (в узком смысле).

Решение. В первом из чисел три верные значащие цифры, во втором — четыре; можно перемножить числа без предварительного округления: $x_1 \cdot x_2 = 12{,}4 \cdot 65{,}54 = 712{,}696$. Следует оставить три значащие цифры, так как наименее точный из сомножителей имеет столько же верных значащих цифр; таким образом, $u = 713$. Подсчитаем погрешность:

$$\delta_u^* = \delta_{x_1}^* + \delta_{x_2}^* = \frac{0{,}05}{12{,}4} + \frac{0{,}005}{65{,}54} = 0{,}0041.$$

Тогда $\Delta_u = 713 \cdot 0{,}0041 \approx 3$. Значит, произведение u имеет два верных знака и его следует записать так. $u = 713 \pm 3$.

Число верных знаков произведения. Пусть дано произведение k сомножителей ($k \leqslant 10$):

$$u = x_1 \cdot x_2 \ldots x_k = \prod_{i=1}^{k} x_i,$$

где $x_i \neq 0$. Каждый из сомножителей содержит не менее чем n верных цифр ($n > 1$).

Пусть каждый из сомножителей имеет вид:

$$x_1 = \alpha_1 \cdot 10^{l_1} + \beta_1 \cdot 10^{l_1 - 1} + \gamma_1 \cdot 10^{l_1 - 2} + \ldots,$$
$$x_2 = \alpha_2 \cdot 10^{l_2} + \beta_2 \cdot 10^{l_2 - 1} + \gamma_2 \cdot 10^{l_2 - 2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_k = \alpha_k \cdot 10^{l_k} + \beta_k \cdot 10^{l_k - 1} + \gamma_k \cdot 10^{l_k - 2} + \ldots,$$

т. е.

$$x_i = \alpha_i \cdot 10^{l_i} + \beta_i \cdot 10^{l_i - 1} + \gamma_i \cdot 10^{l_i - 2} + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — первые значащие цифры приближенных сомножителей, записанных в десятичной системе счисления.

Для предельной относительной погрешности приближенного числа, имеющего n верных знаков, используем формулу

$$\delta^*_{x_i} = \frac{\omega}{\alpha_i \cdot 10^{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Тогда предельная относительная погрешность произведения k приближенных чисел, имеющих по n верных значащих цифр, равна

$$\delta^*_u = \sum_{i=1}^{k} \delta^*_{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega}{\alpha_i \cdot 10^{n-1}} = \frac{\omega}{10^{n-1}} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}. \tag{11}$$

Учитывая, что сомножителей не более 10 ($k \leqslant 10$), имеем $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i} \leqslant 10$ и, следовательно,

$$\delta^*_u \leqslant \frac{\omega}{10^{n-2}}. \tag{12}$$

Таким образом, если все сомножители имеют n верных значащих цифр и число сомножителей не более 10, то число верных знаков произведения на одну или на две единицы меньше n. В том случае, если сомножители имеют различную точность, под n следует понимать число верных знаков наименее точного из сомножителей.

Пример 3. Определить предельную относительную погрешность и количество верных цифр произведения $u = 84{,}76 \cdot 8{,}436$, где все цифры сомножителей верны в узком смысле.

Решение. Оба сомножителя имеют по четыре верные цифры в узком смысле, т. е. $n = 4$ и $\omega = 0{,}5$. Тогда по формуле (11) имеем

$$\delta^*_u = \frac{1}{2 \cdot 10^3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} \cdot 10^{-3} < \frac{1}{2}\, 10^{-3}.$$

Следовательно, произведение имеет по меньшей мере три верные цифры в узком смысле.

Проверим, так ли это. Найдем произведение данных приближенных чисел; оно равно $u = 714,1$. Определим предельную абсолютную погрешность по формуле $\Delta_u^* = |u| \delta_u^*$; получим $\Delta_u^* = 714,1 \cdot 0,125 \cdot 10^{-3} \approx 0,09$. Тогда $u = 714,1 \pm \pm 0,09$. Отсюда следует, что произведение имеет три верные цифры в узком смысле.

Пример 4. Определить предельную относительную погрешность произведения $u = 145,35 \cdot 1,24386$ и число верных цифр в нем, если числа даны с верными знаками в узком смысле.

Р е ш е н и е. Здесь $x_1 = 145,35$; $n_1 = 5$; $x_2 = 1,24386$; $n_2 = 6$; $\omega = 0,5$. Данные числа имеют различное количество верных значащих цифр, выбираем $n = 5$. Находим

$$\delta_u^* = \frac{\omega}{10^{n-1}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) =$$

$$= 1 \cdot 10^{-4} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

Мы видим, что произведение имеет четыре верные значащие цифры в широком или три в узком смысле.

Таким образом, в самом неблагоприятном случае, когда первые значащие цифры сомножителей равны единице, произведение будет иметь по меньшей мере $n - 2$ верные значащие цифры (где n — наименьшее число верных значащих цифр данных сомножителей).

Пример 5. Определить предельную относительную погрешность произведения $u = 4,387 \cdot 593,6$ и число верных знаков в нем, если числа содержат только верные цифры в широком смысле

Р е ш е н и е. Имеем $\alpha_1 = 4$, $n_1 = 4$, $\alpha_2 = 5$, $n_2 = 4$, $\omega = 1$. Тогда

$$\delta_u^* = \frac{\omega}{10^{n-1}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = \frac{1}{10^3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = 10^{-3} \cdot 0,45 < 1 \cdot 10^{-3}.$$

Произведение содержит три верные значащие цифры в широком смысле, т. е. на одну меньше, чем каждый из сомножителей.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим случай, когда находится произведение большого числа приближенных чисел

$$u = x_1 x_2 \ldots x_k \quad (k > 10).$$

Предельная относительная погрешность согласно формуле (8) равна

$$\delta_u^* = \delta_{x_1}^* + \delta_{x_2}^* + \ldots + \delta_{x_k}.$$

Однако при большом числе k удобнее пользоваться статистической оценкой, учитывающей частичную компенсацию погрешностей разных знаков. Если предельные относительные погрешности сомножителей примерно одинаковы и равны δ_i^*, то для определения предельной относительной погрешности произведения можно воспользоваться формулой

$$\delta_u^* = \sqrt{3k} \cdot \delta_i^* \cdot \tag{13}$$

Если же предельная относительная погрешность одного из чисел значительно превышает погрешности остальных сомножителей, то предельная относительная погрешность произведения принимается равной этой максимальной погрешности.

§ 1.8. Погрешность частного. Число верных знаков частного

Погрешность частного. Теорема. *Относительная погрешность частного не превышает суммы относительных погрешностей делимого и делителя.*

Доказательство. Пусть x и y — приближенные числа, а Δ_x и Δ_y — абсолютные погрешности. Для определенности положим $x > 0$, $y > 0$. Требуется найти погрешность частного

$$u = \frac{x}{y}. \tag{1}$$

Прологарифмировав выражение (1), получим

$$\ln u = \ln x - \ln y. \tag{2}$$

Абсолютная погрешность алгебраической суммы приближенных чисел не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых, поэтому

$$\Delta_{\ln u} \leqslant \Delta_{\ln x} + \Delta_{\ln y}. \tag{3}$$

Применяя приближенную формулу

$$\Delta_{\ln u} \approx | d \ \ln u \ | = \frac{\Delta u}{| u |},$$

получим

$$\frac{\Delta_u}{u} \leqslant \frac{\Delta_x}{x} + \frac{\Delta_y}{y}, \tag{4}$$

или

$$\delta_u \leqslant \delta_x + \delta_y. \tag{4'}$$

Знак модуля в равенстве (4) опущен, так как мы положили $x > 0$, $y > 0$.

Формула (4), очевидно, будет верной и тогда, когда делимое и делитель имеют разные знаки.

Следствие. *Предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.*

Действительно, $\delta_x \leqslant \delta_x^*$, $\delta_y \leqslant \delta_y^*$, т. е. $\delta_u \leqslant \delta_x^* + \delta_y^*$,

$$\delta_u = \delta_x^* + \delta_y^*. \tag{5}$$

Замечание. Все правила приближенных вычислений, сформулированные для умножения, распространяются и на случай деления. В частности, если одно из чисел (делимое или делитель) относительно точнее другого, то более точное число округляется так, чтобы в нем оказалось на одну значащую цифру больше, чем количество верных значащих цифр наименее точного из чисел. Это же правило распространяется на случай, когда приходится перемножать или делить несколько чисел. Окончательный результат, как правило, записывается с абсолютной или предельной абсолютной погрешностью. Поэтому, знаая относительную или предельную относительную погрешность частного, легко определить абсолютную или предельную абсолютную погрешность результата по формуле

$$\Delta_u^* = |u|\,\delta_x^*.$$

Пример 1. Вычислить частное $u = x/y$ приближенных чисел $x = 5{,}735$ и $y = 1{,}23$, если все цифры делимого и делителя верны в широком смысле. Определить предельные относительную и абсолютную погрешности.

Решение. Сначала вычислим частное. Делимое $x = 5{,}735$ содержит четыре верные значащие цифры, делитель — три; поэтому можно проводить деление без предварительного округления: $u = 5{,}735 : 1{,}23 = 4{,}66$. В результате оставлены три значащие цифры, так как наименее точное число (делитель) содержит три верные значащие цифры.

2) Подсчитаем предельную относительную погрешность частного по формуле (5), учитывая, что $\Delta_x^* = 0{,}001$, $\Delta_y^* = 0{,}01$:

$$\delta_u^* = \delta_x^* + \delta_y^* = \frac{1}{5735} + \frac{1}{123} = 0{,}00018 + 0{,}00813 = 0{,}00831 = 0{,}83\,\%.$$

3) Определим предельную абсолютную погрешность

$$\Delta_u^* = |u|\,\delta_u^* = 4{,}66 \cdot 0{,}0083 = 0{,}04.$$

Окончательный результат следует записать так: $u = 4{,}66 \pm 0{,}04$.

Заметим, что цифра сотых долей является сомнительной, поскольку $0{,}04 > 0{,}01$. Если записать результат только с верными значащими цифрами, то необходимо произвести округление и учесть погрешность округления, т. е. $u_1 = 4{,}7$; $\Delta_{u_1}^* = \Delta_u^* + \Delta_{\text{окр}} = 0{,}04 + 0{,}04 = 0{,}08 \approx 0{,}1$. Тогда $u = 4{,}7 \pm 0{,}1$. Однако на самом деле предельная абсолютная погрешность несколько ниже

Число верных знаков частного. Пусть приближенные числа x и y имеют по n верных значащих цифр и пусть

$$x = \alpha_1 \cdot 10^{l_1} + \alpha_2 \cdot 10^{l_1 - 1} + \ldots;$$
$$y = \beta_1 \cdot 10^{l_2} + \beta_2 \cdot 10^{l_2 - 1} + \ldots .$$

Тогда, используя равенства

$$\delta_x^* = \frac{\omega}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}},\ \delta_y^* = \frac{\omega}{\beta_1 \cdot 10^{n-1}} \quad (0{,}5 \leqslant \omega \leqslant 1),$$

найдем предельную относительную погрешность частного

$$\delta_u^* = \delta_x^* + \delta_y = \frac{\omega}{\alpha_1\, 10^{n-1}} + \frac{\omega}{\beta_1 \cdot 10^{n-1}} = \frac{\omega}{10^{n-1}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}\right). \quad (6)$$

Следовательно, если $\alpha_1 \geqslant 2$ и $\beta_1 \geqslant 2$, то частное имеет $n - 1$ верную значащую цифру. Если же $\alpha_1 = 1$ и $\beta_1 = 1$, то частное может иметь $n - 2$ верные значащие цифры.

Пример 2. Вычислить частное $u = 39{,}356 : 2{,}21$ и определить, сколько в нем содержится верных значащих цифр, если в делимом и делителе все цифры верные (в узком смысле).

Решение. 1) Поскольку в делителе три верные значащие цифры, а в делимом — пять, делимое округляем до четырех значащих цифр и производим деление: $u = 39{,}36 : 2{,}21 = 17{,}81 \approx 17{,}8$ (в результате оставляем столько значащих цифр, сколько их имеется в числе с меньшим количеством верных значащих цифр).

2) Подсчет предельной относительной погрешности произведем по формуле (6), где $\omega = 0{,}5$, поскольку делимое и делитель содержат верные цифры в узком смысле; $n = 3$, так как менее точное число содержит три верные цифры; $\alpha_1 = 3$; $\beta_1 = 2$. Следовательно,

$$\delta_u^* = \frac{\omega}{10^{n-1}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}\right) = \frac{1}{2\cdot 10^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}\cdot 10^{-2} = 0{,}42\ \%.$$

Таким образом, частное содержит две верные значащие цифры (в узком смысле), т. е. на одну значащую цифру меньше, чем у приближенного числа (делителя) с меньшим количеством верных значащих цифр.

Пример 3. Определить предельную относительную погрешность частного $u = 15{,}834 : 1{,}72$ и количество верных значащих цифр в нем, если делимое и делитель содержат верные значащие цифры в широком смысле.

Решение. Наименее точное число содержит три верные значащие цифры. Определим предельную относительную погрешность по формуле (6), приняв $\omega = 1$ (числа содержат верные цифры в широком смыле):

$$\delta_u^* = \frac{\omega}{10^{n-1}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}\right) = \frac{1}{10^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) = \frac{2}{10^2} = 0{,}2\cdot 10^{-1}.$$

Мы видим, что частное содержит только одну верную значащую цифру, т. е. на две верные значащие цифры меньше, чем у наименее точного числа.

§ 1.9. Погрешности степени и корня

Погрешность степени. Теорема. *Предельная относительная погрешность m-й степени приближенного числа (m — натуральное) в m раз больше предельной относительной погрешности самого числа.*

Доказательство. Пусть $u = x^m$. Тогда

$$u = \underbrace{x\cdot x \dots x}_{m \text{ сомножителей}}.$$

Найдем предельную относительную погрешность произведения:

$$\delta_u^* = \underbrace{\delta_x^* + \delta_x^* + \dots + \delta_x^*}_{m \text{ слагаемых}} = m\delta_x^*,$$

т. е.

$$\delta_u^* = m\delta_x^*, \tag{1}$$

что и требовалось доказать. Из равенства (1) вытекает, что при возведении приближенного числа в степень в результате следует оставить столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр содержится в основании степени.

Пример 1. Сторона квадрата $a = 36{,}5$ см (с точностью до 1 мм). Найти площадь квадрата, относительную и абсолютную погрешности и число верных знаков результата.

Решение. 1) Вычислим площадь квадрата

$$S = a^2 = 36{,}5^2 = 1332 = 1{,}33\cdot 10^3\ (\text{см}^2).$$

2) Определим предельную относительную погрешность площади

$$\delta_S^* = 2\delta_a^* = 2\cdot\frac{0{,}1}{36{,}5} \approx 0{,}0054.$$

3) Определим предельную абсолютную погрешность площади

$$\Delta_S^* = S\delta_S^* = 1{,}33\cdot 10^3\cdot 0{,}0054 = 0{,}72\cdot 10 \approx 8 \text{ см}^2.$$

Окончательный ответ можно записать так:

$$S = (1{,}33 \pm 0{,}008)\cdot 10^3 \text{ (см}^2).$$

Таким образом, результат имеет три верные значащие цифры в широком смысле.

Погрешность корня. Теорема. *Предельная относительная погрешность корня m-й степени в m раз меньше предельной относительной погрешности подкоренного числа.*

Доказательство. Пусть $u = \sqrt[m]{x}$, тогда $x = u^m$. Отсюда получаем $\delta_x^* = m\delta_u^*$, т. е.

$$\delta_u^* = \frac{1}{m}\cdot\delta_x^*, \tag{2}$$

что и требовалось доказать.

Из равенства (2) вытекает, что при извлечении корня m-й степени из приближенного числа в результате следует брать столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет подкоренное число.

Пример 2. Определить, с какой относительной погрешностью и со сколькими верными цифрами можно найти сторону квадрата, если его площадь $S = 16{,}45$ см² (с точностью до 0,01).

Решение. Имеем $a = \sqrt{S} = 4{,}056$ (см);

$$\delta_a^* = \frac{1}{2}\delta_S = \frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}01}{16{,}45} = 0{,}0003 = 0{,}03\ \%;$$

$$\Delta_a^* = 4{,}056\cdot 0{,}0003 = 1{,}2\cdot 10^{-3} \approx 0{,}002.$$

Таким образом, $a = 4{,}056 \pm 0{,}002$ (см), откуда $n = 3$.

§ 1.10. Правила подсчета цифр

При вычислениях, если не проводится строгий подсчет погрешностей, рекомендуется пользоваться правилами подсчета цифр. Эти правила указывают, как следует проводить округление всех результатов, чтобы, во-первых, обеспечить заданную точность окончательного результата и, во-вторых, не производить вычислений с лишними знаками, не оказывающими влияние на верные знаки результата.

Приведем правила подсчета цифр, данные В. М. Брадисом.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом верных значащих цифр.

3. При возведении приближенного числа в квадрат или куб в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в основании степени.

4. При извлечении квадратного и кубического корней из приближенного числа в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в подкоренном числе.

5. При вычислении промежуточных результатов следует сохранить на одну цифру больше, чем рекомендуют правила 1—4. В окончательном результате эта «запасная цифра» отбрасывается.

6. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при других действиях), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну «запасную цифру».

7. При вычислении с помощью логарифмов одночленного выражения рекомендуется подсчитать число значащих цифр в приближенном данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и воспользоваться таблицей логарифмов с числом десятичных знаков на единицу большим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

8. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с m верными цифрами исходные данные следует брать с таким числом цифр, которые согласно предыдущим правилам обеспечивают $m+1$ цифру в результате.

Эти правила даются в предположении, что компоненты действий содержат только верные цифры и число действий невелико.

Пример 1. Вычислить $X=\dfrac{a^3\sqrt{b}}{c^2}$, где $a=7{,}45\ (\pm 0{,}01)$, $b=50{,}46\ (\pm 0{,}02)$, $c=15{,}4\ (\pm 0{,}03)$. Определить погрешность результата.

Решение. При вычислении промежуточных результатов будем сохранять одну «запасную цифру», т. е. если по общему правилу следует оставить n значащих цифр, то в промежуточных результатах сохраним $n+1$ цифру. Имеем

$$a^3=413{,}5,\quad \sqrt{b}=7{,}1035,\quad c^2=237{,}2;\ X=\frac{413{,}5\cdot 7{,}1035}{237{,}2}=12{,}4.$$

В результате оставлены три значащие цифры, так как наименьшее число значащих цифр в сомножителях равно трем

Подсчитаем погрешности результата:

$$\delta^*_X=3\delta^*_a+\frac{1}{2}\delta^*_b+2\delta^*_c=0{,}00405+0{,}000195+0{,}0038\approx 0{,}0081;$$

$$\Delta^*_X=12{,}4\cdot 0{,}0081\approx 0{,}11.$$

Итак, получаем ответ: $X=12{,}4\pm 0{,}11$; $\delta^*_X=0{,}81\%$.

Пример 2. Вычислить $X=\dfrac{(a+b)\,m}{(c-d)^2}$, где $a=2{,}754\ (\pm 0{,}001)$, $b=11{,}7\ (\pm 0{,}04)$, $m=0{,}56\ (\pm 0{,}005)$, $c=10{,}536\ (\pm 0{,}002)$, $d=6{,}32\ (\pm 0{,}008)$. Определить погрешность результата.

Решение. Находим

$$a+b=2{,}75+11{,}7=14{,}45;$$

$$\Delta_{a+b}=\Delta_a+\Delta_b+\Delta_{\text{окр}}=0{,}001+0{,}04+0{,}004=0{,}045;$$

$$c-d=10{,}536-6{,}32=4{,}216;\ \Delta_{c-d}=0{,}002+0{,}008=0{,}010.$$

Следовательно,

$$X=\frac{14{,}45\cdot 0{,}56}{4{,}216^2}=\frac{14{,}45\cdot 0{,}56}{17{,}75}=0{,}456\approx 0{,}46=4{,}6\cdot 10^{-1};$$

$$\delta_X = \frac{0,045}{14,45} + \frac{0,005}{0,56} + 2 \cdot \frac{0,01}{4,216} = 0,00311 + 0,00894 + 0,00474 = 0,01679 \approx$$
$$\approx 1,68\,\%;$$

$$\Delta_X = 0,46 \cdot 0,0168 = 0,0077.$$

Итак, получаем ответ: $X = 0,46\ (\pm 0,0077)$; $\delta_X = 1,68\%$.

Пример 3. Пользуясь правилами подсчета цифр, вычислить

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right),$$

где $h = 11,8$, $\pi = 3,142$, $R = 23,67$.

Решение. Находим

$$V = 3,142 \cdot 11,8^2\,(23,67 - 3,933) = 3,142 \cdot 11,8^2 \cdot 19,737 =$$
$$= 3,142 \cdot 139,2 \cdot 19,737 = 437,37 \cdot 19,737 = 8630 \approx 8,63 \cdot 10^3.$$

Упражнения

1. Выполнить последовательные округления следующих чисел: а) 2,75464; б) 3,14159; в) 0,56453; г) 4,1945; д) 0,60653.

Ответы: а) 2,7546; 2,755; 2,75; 2,8; 3; б) 3,1416; 3,142; 3,14; 3,1; 3; в) 0,5645; 0,565; 0,56; 0,6; 1; г) 4,194, 4,19; 4,2; 4; д) 0,6065; 0,607; 0,61; 0,6; 1.

2. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ_a и относительную (в процентах) δ_a погрешности полученных приближений: а) 1,1426; б) 0,01015; в) 0,1245; г) 921,55; д) 0,002462.

Ответы: а) 1,14; $\Delta_a = 0,0026$; $\delta_a = 0,23\%$; б) 0,0102; $\Delta_a = 0,00005$; $\delta_a = 0,5\%$; в) 0,124; $\Delta_a = 0,0005$; $\delta_a = 0,41\%$; г) 922; $\Delta_a = 0,45$; $\delta_a = 0,049\%$; д) 0,00246; $\Delta_a = 0,000002$; $\delta_a = 0,082\%$

3. Определить абсолютную погрешность Δ_x следующих приближенных чисел по их относительной погрешности δ_x: а) $x = 2,52$; $\delta_x = 0.7\%$; б) $x = 0,986$; $\delta_x = 10\%$; в) $x = 46,72$; $\delta_x = 1\%$; г) $x = 199.1$; $\delta_x = 0,01$; д) $x = 0,86341$; $\delta_x = 0,0004$.

Ответы: а) 0,018; б) 0,099; в) 0,047; г) 2,0; д) 0,00035.

4. Определить количество верных значащих цифр в узком и широком смысле для следующих приближенных чисел: а) $39,285 \pm 0,034$; б) $1,2785 \pm 0,0007$; в) $183,3 \pm 0,1$; г) $0,056 \pm 0,0003$; д) $84,17 \pm 0,0073$.

Ответы: а) 3 и 3; б) 4 и 4; в) 3 и 4; г) 2 и 2; д) 3 и 4.

5. Определить, какое из равенств точнее: а) $6/25 \approx 1/4$ или $1/3 \approx 0,333$; б) $1/9 \approx 0,1$ или $1/3 \approx 0,33$; в) $15/7 \approx 2,14$ или $1/9 \approx 0,11$; г) $6/7 \approx 0,86$ или $\pi \approx 22/7$; д) $\pi = 3,142$ или $\sqrt{10} \approx 3,1623$.

Указание. Предварительно найти предельные относительные погрешности. Более точным является то равенство, предельная относительная погрешность которого меньше.

Ответы: а) второе; б) второе; в) первое; г) второе; д) второе.

6. Округлить сомнительные цифры числа $a = 47,453 \pm 0,024$, оставив в нем верные знаки в узком смысле.

Ответ: $a = 47,5$.

7. Округлить сомнительные цифры числа $a = 46,3852 \pm 0,0031$, оставив в нем верные знаки в широком смысле.

Ответ: 46,39.

8. Округлить сомнительные цифры приближенного числа $a = 3,2873$, если $\delta_a = 0,1\%$, оставив в нем верные знаки в широком смысле.

Ответ: 3,29.

9. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности приближенных чисел, если они имеют только верные цифры: а) $a = 0,7538$ (в узком смысле); б) $a = 17,354$ (в широком смысле).

Указание. Использовать формулу (4) § 1.5.

Ответы: а) $\Delta_a^* = 0,00005$; $\delta_a^* = 0,0075\%$; б) $\Delta_a = 0,001$; $\delta_a^* = 0,01\%$.

10. Со сколькими верными значащими цифрами надо взять результаты указанных ниже операций, чтобы их предельные относительные погрешности не превышали $k\%$?

$$а)\ a=1/3,\quad \delta_a^*=0,1\%;\quad б)\ a=\sqrt{29};\quad \delta_a^*=0,1\%;$$
$$в)\ a=5/27,\quad \delta_a^*=0,1\%;\quad г)\ a=\sqrt[3]{347},\quad \delta_a^*=0,1\%;\quad д)\ a=\sqrt[5]{33},\quad \delta_a^*=0,1\%.$$

Указание. Воспользоваться формулой (4) § 1.5.

Ответы: а) 4; б) 3; в) 4; г) 3; д) 4.

11. Вычислить следующие выражения с оценкой погрешностей. В ответе сохранить все верные цифры и одну сомнительную. Все числа даны с верными цифрами.

$$а)\ Y=\frac{3,07\cdot 326}{36,4\cdot 323};\quad б)\ Y=\frac{36\cdot 245\cdot 85}{975\cdot 642};$$
$$в)\ Y=\frac{37,2+458,67}{36,5\cdot 246};\quad г)\ Y=\frac{96,891-4,25}{33,3+0,426}.$$

Ответы: а) $Y=0,085$; $\Delta_Y^*=0,0012$; $\delta_Y^*=1,4\%$; б) $Y=1,20$; $\Delta_Y^*=0,056$; $\delta_Y^*=4,7\%$; в) $Y=0,0552$; $\Delta_Y^*=0,00043$; $\delta_Y^*=0,77\%$, г) $Y=2,747$; $\Delta_Y^*=0,0090$; $\delta_Y^*=0,33$.

12. Пользуясь правилами подсчета цифр, вычислить:

$$а)\ S=\frac{h^2}{18}\cdot\frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2},\ \text{где } h=2,73;\quad a=0,152;\quad b=0,328;$$

$$б)\ S=\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2),\ \text{где } D=0,937;\quad d=0,0630.$$

Ответы: а) $S=0,594$; б) $S=0,687$.

Глава II

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 2.1. Матрицы и векторы. Основные действия над матрицами и векторами

Прямоугольная таблица, составленная из элементов (в частном случае чисел) и имеющая m строк и n столбцов, называется *матрицей* типа $m\times n$. Элементы матрицы обозначаются через a_{ij}, где i — номер строки, а j — номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Например,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

матрица типа $m\times n$, имеющая m строк и n столбцов.

Сокращенная запись матрицы имеет вид $A=[a_{ij}]$, где $i=1, 2,\dots,m$; $j=1, 2, \dots, n$.

Если в матрице $m \neq n$, т. е. число строк не равно числу столбцов, то матрица называется *прямоугольной*.

Матрица, имеющая только одну строку, т. е. $m = 1$, называется *матрицей-строкой*, или *вектором-строкой*; например,

$$A = [a_{11}\ a_{12} \dots a_{mn}] \text{ или } A = [1\ 2\ 3\ 4].$$

Матрица, имеющая только один столбец, т. е. $n = 1$, называется *матрицей-столбцом*, или *вектором-столбцом*; например,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \text{ или } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем матрицу-строку или матрицу-столбец будем называть *вектором* и обозначать $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ или $X = [x_1\ x_2 \dots x_n]$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *элементами*, или *координатами*, вектора X. Так как число координат вектора есть, по определению, его размерность, то вектор X является n-мерным.

Если в матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

типа $m \times n$ поменять местами строки и столбцы, то получится матрица

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

типа $m \times n$, которая называется *транспонированной* по отношению к A.

Пример 1. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

типа 3×4 транспонированной является матрица

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

типа 4×3.

Транспонирование матрицы-столбца дает матрицу-строку, и наоборот. Если в матрице число строк равно числу столбцов, т. е. $m = n$, то матрица называется *квадратной*. Такую матрицу можно записать в виде

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Для квадратной матрицы общее число строк или столбцов называется *порядком* матрицы.

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, проходящая через верхний левый и нижний правый угол, т. е. совокупность элементов вида a_{ii}, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*. Эта матрица имеет следующий вид:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, называется *единичной*. Единичная матрица обозначается символом E и имеет вид

$$E_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}.$$

Индекс n указывает на порядок единичной матрицы. В матричном исчислении единичная матрица играет роль единицы.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается через O. Если нужно указать число строк и столбцов то пишут $O_{m\times n}$:

$$O_{m\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица, в которой все элементы расположены симметрично относительно главной диагонали, называется *симметричной*. Для симметричной матрицы имеет место равенство $a_{ij} = a_{ji}$.

Например,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

есть симметричная матрица.

Две матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ называются *равными*, если: 1) они одного и того же типа, т. е. число строк матрицы A равно числу строк матрицы B и число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B; 2) соответствующие элементы этих матриц равны между собой. Таким образом, если

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots b_{mn} \end{bmatrix}$$

и $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$, то $A = B$.

Суммой двух матриц одинакового типа $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ называется матрица $C = [c_{ij}]$ того же типа, элементы которой c_{ij} равны суммам соответствующих элементов a_{ij} и b_{ij} матриц A и B, т. е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Разность матриц определяется аналогично сумме, только у элементов вычитаемой матрицы знак меняется на противоположный: $D = A - B$; $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ i = 1, 2, \dots, n)$.

Пример 2. Пусть

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & 5 \\ -7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$C=A+B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}; \quad D=A-B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 11 \\ -6 & -3 & 6 & 9 \\ -8 & 12 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Сложение матриц подчиняется следующим законам:

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$; 2) $A + B = B + A$; 3) $A + O = A$.

Произведением матрицы $A = [a_{ij}]$ *на число* α называется матрица, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы A на число α:

$$A\alpha=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \dots \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \dots \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} \dots \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Произведение $A\alpha$ подчиняется следующим законам:

$$1)\ 1\cdot A = A;\ 2)\ 0\cdot A = 0;\ 3)\ \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)\cdot A.$$

Матрица $-A = (-1)A$ называется *противоположной* матрице A.

Пример 3. Произведение матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

на число 2 есть матрица

$$2A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ -6 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Произведением матрицы $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *на матрицу* $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ называется матрица $C = [c_{ij}]_{m\times q}$.

Произведение AB двух матриц в указанном порядке возможно в том и только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Если тип матрицы A равен $m\times n$, а тип матрицы B равен $p\times q$, то матрица $C = AB$ имеет тип $m\times q$, т. е. в матрице-произведении число строк равно числу строк левого сомножителя, а число столбцов — числу столбцов правого сомножителя:

$$C=AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{11} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{bmatrix}.$$

Чтобы получить элемент c_{ij}, стоящий в i-й строке и в j-м столбце произведения AB, нужно элементы i-й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и полученные произведения сложить:

$$C=AB=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{p1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1n}b_{p2}\dots \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{p1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{p2}\dots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\dots+a_{mn}b_{p1} & a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\dots+a_{mn}b_{p2}\dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \dots a_{11}b_{1q}+a_{12}b_{2q}+\dots+a_{1n}b_{pq} \\ \dots a_{21}b_{1q}+a_{22}b_{2q}+\dots+a_{2n}b_{pq} \\ \dots\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dots a_{m1}b_{1q}+a_{m2}b_{2q}+\dots+a_{mn}b_{pq} \end{matrix}\Bigg]$$

т. е. $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, q$.

Например, $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + \dots + a_{2n}b_{n3}$.

Примеры.

4.

$$AB=\begin{bmatrix}3 & 2 & 8 & 1\\ 1 & -4 & 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\\ 0 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3\cdot 2+2\cdot 1+8\cdot 0+1\cdot 3 & 3(-1)+2\cdot(-3)+8\cdot 1+1\cdot 1\\ 1\cdot 2+(-4)\cdot 1+0\cdot 0+3\cdot 3 & 1\cdot(-1)+(-4)\cdot(-3)+0\cdot 1+3\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 0\\ 7 & 14\end{bmatrix}.$$

Здесь $AB=[a_{ij}]_{2\times 4}\cdot[b_{ij}]_{4\times 2}=C=[c_{ij}]_{2\times 2}$.

5. $$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3\\ 4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 3\\ 7\cdot 1+8\cdot 2+9\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\ 32\\ 50\end{bmatrix}.$$

Здесь $AB=[a_{ij}]_{3\times 3}\cdot[b_{ij}]_{3\times 1}=[c_{ij}]_{3\times 1}$.

6. $$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4\\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{bmatrix},$$ т. е. $AB\neq BA$.

7. $$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 4+2\cdot 3+3\cdot 0\\ 4\cdot 3+5\cdot 2+6\cdot 4 & 4\cdot 2+5\cdot 1+6\cdot 3 & 4\cdot 4+5\cdot 3+6\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 13 & 10\\ 46 & 31 & 31\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$ не существует.

Матричные произведения подчиняются следующим законам:

1) $A(BC)=(AB)C$; 2) $\alpha(AB)=(\alpha A)B$; 3) $(A+B)C=AC+BC$; 4) $C(A+B)=CA+CB$.

Отметим, что $AB\neq BA$, т. е. произведение двух матриц в общем случае не обладает свойством переместительности. Значит, в общем случае нельзя менять местами матрицы-сомножители, не изменив их произведения.

Если изменить порядок сомножителей, то может оказаться, что произвести умножение матриц вообще невозможно.

О произведении AB двух матриц A и B будем говорить, что матрица B умножается на матрицу A слева, или что матрица A умножается на матрицу B справа.

Произведение нескольких матриц ABC следует понимать так: матрица A умножается справа на матрицу B, а полученная матрица умножается справа на матрицу C и т. д. Количество перемножаемых матриц может быть любым, лишь бы можно было перемножать каждые две рядом стоящие матрицы.

Матрица A^n называется *n-й степенью* матрицы A. Если A — квадратная матрица, а n — целое положительное число, то

$$\underbrace{A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A}_{n \text{ множителей}}.$$

Действия сложения и умножения на число над матрицами-столбцами и матрицами-строками (т. е. векторами) производятся аналогично соответствующим действиям над квадратными матрицами. Так, *суммой двух векторов* $X = [x_1\ x_2 \dots x_n]$ и $Y = [y_1\ y_2 \dots y_n]$ будет вектор $Z = [z_1\ z_2 \dots z_n]$ с координатами $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_2 + y_2$, ..., $z_n = x_n + y_n$, *произведением вектора* $X = [x_1\ x_2 \dots x_n]$ *на число* α — вектор $Z = \alpha X = [\alpha x_1\ \alpha x_2 \dots \alpha x_n]$.

Пример 8. Сумма векторов $X = [1\ 2\ 3]$ и $Y = [-5\ -2\ 4]$ есть вектор $Z = [-4\ 0\ 7]$; произведением вектора $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ на число $\alpha = 2$ является вектор $Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$.

§ 2.2. Определитель матрицы. Свойства определителя и методы его вычисления

С квадратной матрицей $A = [a_{ij}]$ связан *определитель* (*детерминант*), который обозначается $\det A$ или $|A|$:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы есть число, вычисляемое по некоторым правилам, которые мы рассмотрим ниже.

В определителе различают две диагонали: главную и побочную. *Главная диагональ*, так же как и в квадратной матрице, состоит из элементов a_{ii}, где $i = 1, 2, \dots, n$. *Побочная диагональ* проходит перпендикулярно главной, из верхнего правого угла определителя в нижний левый.

Порядок определителя соответствует порядку матрицы, определителем которой он является.

Определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}.$$

Пример 1.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3.$$

Определителем третьего порядка называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Таким образом, каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с оп-

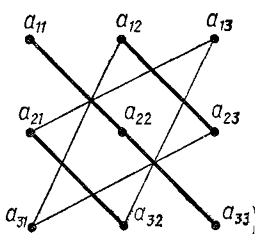


Рис. 2.1

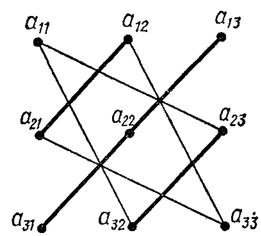


Рис. 2.2

ределенными знаками: со знаком плюс — три члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали (рис. 2.1); со знаком минус — три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали (рис. 2.2). Указанное правило называется *правилом треугольников.*

Пример 2.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot2 + 3\cdot1\cdot(-4) + 2\cdot(-1)\cdot2 - 2\cdot5\cdot3 - 1\cdot(-1)\cdot1 -$$

$$-2\cdot(-4)\cdot2 = -19.$$

Перечислим теперь свойства определителя.

1. *Определитель не меняется при транспонировании:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\-4&5&-1\\2&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-4&2\\2&5&1\\3&-1&2\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot2+3\cdot(-4)\cdot1+2\cdot(-1)\cdot2-$$
$$-3\cdot5\cdot2-1\cdot(-1)\cdot1-2\cdot(-4)\cdot2=-19.$$

2. *Если одна из строк или один из столбцов определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.*

Например,

$$\det A=\begin{vmatrix}0&1&2\\0&3&4\\0&10&15\end{vmatrix}=0\cdot3\cdot15+0\cdot1\cdot4+0\cdot2\cdot10-0\cdot3\cdot2-0\cdot1\cdot15-0\cdot4\cdot10=0.$$

3. *От перестановки двух строк или двух столбцов определитель меняет только знак.*

Например,

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\-4&5&-1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(-1)+2\cdot2\cdot(-4)+2\cdot5\cdot3-3\cdot1\cdot(-4)-$$
$$-5\cdot2\cdot1-2\cdot2\cdot(-1)=19$$

(ср. с примером, иллюстрирующим свойство 1).

4. *Определитель содержащий две одинаковые строки или два одинаковых столбца, равен нулю.*

Например,

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\2&1&2\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot2+2\cdot3\cdot2+1\cdot1\cdot3-2\cdot2\cdot3-1\cdot2\cdot2-1\cdot1\cdot3=0.$$

5. *Если все элементы некоторой строки или столбца определителя умножить на число $k\neq0$, то сам определитель умножится на это число.*

Иначе это свойство можно сформулировать так: *общий множитель всех элементов некоторой строки или некоторого столбца можно вынести за знак определителя.*

Например,

$$\det A=\begin{vmatrix}3&6&9\\2&1&2\\-4&5&-1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\-4&5&-1\end{vmatrix}=3\cdot19=57$$

(ср. с примером, иллюстрирующим свойство 3).

6. *Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.*

Например,

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 = 0.$$

7. *Если все элементы i-й строки определителя n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых: $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), то данный определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й, такие же, как и в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_{ij}, а в другом — из элементов c_{ij}, т. е.*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} = b_{21} + c_{21} & a_{22} = b_{22} + c_{22} & a_{23} = b_{23} + c_{23} & \ldots a_{2n} = b_{2n} + c_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1.$$

8. *Если одна из строк определителя представляет сумму других строк или сумму произведений других строк определителя на число k, то определитель равен нулю.* (Это следует из свойств 6 и 7 определителя.)

Например,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot 0 = 0.$$

9. *Определитель не изменится, если к элементам одной из его строк (столбцов) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.*

Например,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

(см. пример, иллюстрирующий свойство 7). Умножим третью строку на 3 и прибавим ко второй строке; тогда

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot2+1\cdot7\cdot10+4\cdot0\cdot9-1\cdot3\cdot9-4\cdot7\cdot2-2\cdot0\cdot10=-1.$$

Применяя вышеуказанные свойства определителей, можно упростить задачу вычисления определителей n-го порядка.

Определитель n-го порядка может быть выражен через определители более низких порядков.

Для этого необходимо ввести понятия минора и алгебраического дополнения. Пусть дан некоторый определитель n-го порядка. *Минором* k-го порядка ($1 \leqslant k \leqslant n-1$) определителя d называется определитель, получающийся после вычеркивания в исходном определителе некоторых $n-k$ строк и $n-k$ столбцов.

Так, например, минором k-го порядка определителя

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

при $k=1$ является определитель с вычеркнутыми тремя строками и тремя столбцами, при $k=2$ — определитель с вычеркнутыми двумя строками и двумя столбцами и при $k=3$ — определитель с вычеркнутой строкой и столбцом.

Максимальное число k для определителя n-го порядка может быть равно $n-1$. При $k=n-1$ вычеркиваются только одна строка и один столбец.

В частности, если в определителе n-го порядка вычеркивается только одна строка (i-я) и один столбец (j-й), то на их пересечении окажется единственный элемент a_{ij}, и полученный минор $(n-1)$-го порядка называется соответствующим этому элементу и обозначается через M_{ij}.

Например, элементу a_{11} соответствует минор

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

так как элемент a_{11} лежит на пересечении первой строки и первого столбца.

Если присвоить минору знак «+» или «—», в зависимости от суммы номеров строк и столбцов, на пересечении которых находится соответствующий этому минору элемент, то данный минор называется *алгебраическим дополнением* и обозначается $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Очевидно, если сумма $i+j$ четная, то алгебраическое дополнение имеет тот же знак, что и минор; если же сумма $i+j$ нечетная, то знак изменится на противоположный.

Пример 3. Для определителя

$$d=\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\ 6 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}$$

алгебраическое дополнение элемента a_{21} вычисляется таким образом:

$$A_{21}=(-1)^{i+j}M_{ij}=(-1)^3 M_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix}=(-1)(-3-20)=23.$$

Вообще, *определитель равен сумме всех произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения*, а именно:

$$d=\begin{vmatrix}a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n}\\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n}\\ \dots\dots\dots\\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}, \qquad (1)$$

или

$$d=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}, \qquad (1')$$

где формула (1) дает разложение определителя d по элементам i-й строки, а формула (1′) — по элементам j-го столбца.

Пример 4. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 6 & 5 & -4\\ 7 & 3 & -7\end{vmatrix},$$

разложив его по элементам второй строки

Решение. Имеем $d=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$, откуда

$$d=-6\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 3 & -7\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1 & -3\\ 7 & -7\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1 & -2\\ 7 & 3\end{vmatrix}=(-6)\cdot 23+5\cdot 14+4\cdot 17=$$
$$=-138+70+68=0.$$

Применяя свойство 8 определителя, мы бы могли сразу сказать, что этот определитель равен нулю, так как вторая строка его представляет собой сумму третьей и первой строки, умноженной на -1.

Пример 5. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix},$$

разложив его по элементам первого столбца.

Решение. 1) Имеем $d=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+a_{41}A_{41}$. Находим

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 6 & 10\\ 4 & 10 & 20\end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 5\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix}=4\left(2\begin{vmatrix}6 & 5\\ 5 & 5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 6\\ 2 & 5\end{vmatrix}\right)=$$
$$=4(2\cdot 5-3\cdot 5+2\cdot 3)=4.$$

Мы вынесли за знак определителя A_{11} общий множитель 2 из третьей строки и общий множитель 2 из третьего столбца и разложили получившийся определитель по элементам первой строки

2) Находим

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -2\left(\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -2(10-10+3) = -6.$$

Мы вынесли общий множитель 2 из третьей строки и разложили определитель по элементам первой строки.

3) Аналогично получаем

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 2\left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 2(10-12+4) = 4.$$

4) Наконец, находим

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6+8-3 = -1.$$

5) Раскладывая определитель A по элементам первой строки, окончательно получим

$$\det A = 1\cdot 4 + 1\cdot(-6) + 1\cdot 4 + 1\cdot(-1) = 1.$$

Пример 6. Вычислить определитель, заданный в предыдущем примере, применяя преобразования, основанные на свойствах определителя (так называемые элементарные преобразования)

Р е ш е н и е. 1) Если мы оставим первую строку определителя без изменения и, умножив ее на -1, прибавим сначала ко второй, а затем к третьей и четвертой строкам, то определитель не изменится (свойство 9):

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}.$$

2) Раскладываем полученный определитель по элементам первого столбца: $d = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$. Так как $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{41} = 0$, то $d = a_{11}A_{11}$

3) Оставляем без изменения первую строку, затем, умножив ее на -2, прибавим ко второй строке и, наконец, умножив на -3, прибавим к третьей строке. Согласно свойству 9, определитель от этих преобразований не изменится. Получаем

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

4) Раскладывая последний определитель снова по элементам первого столбца, имеем $d = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$, но так как $a_{21} = 0$ и $a_{31} = 0$, то $d = a_{11}A_{11}$.

5) Вычисляем полученный в результате преобразований определитель второго порядка:

$$d=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 10\end{vmatrix}=1.$$

Таким образом, мы рассмотрели два из существующих методов вычисления определителей n-го порядка

§ 2.3. Ранг матрицы

Рангом матрицы называется наибольший порядок миноров данной матрицы, отличных от нуля. Из определения следует, что если ранг матрицы равен r, то в матрице можно найти хотя бы один минор r-го порядка M_{ij}, не равный нулю, а все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю. Отметим, что ранг нулевой матрицы равен нулю, а ранг матрицы-строки (или матрицы-столбца) равен единице.

При нахождении ранга переходят от миноров меньших порядков к минорам больших порядков и придерживаются следующего правила: пусть найден минор r-го порядка M_{ij}, отличный от нуля, тогда нужно вычислить лишь миноры $(r+1)$-го порядка, окаймляющие данный минор M_{ij}. Если все эти миноры равны нулю, то ранг матрицы равен r; если же хотя бы один из них отличен от нуля, то эту операцию следует применить к нему, причем в этом случае ранг матрицы заведомо больше r.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 7 & 2\end{bmatrix}.$$

Решение. 1) Находим минор второго порядка, не равный нулю:

$$M_1=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}\neq 0.$$

Этот минор находится на пересечении второй и третьей строк и второго и третьего столбцов.

2) Найдем миноры третьего порядка, окаймляющие данный, семи возможными способами. Составляем M_2 и M_3 из второй, третьей и четвертой строк:

$$M_2=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 7\end{vmatrix}=0$$

(так как третья строка равна сумме первой и удвоенной второй);

$$M_3=\begin{vmatrix}4 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & 7 & 2\end{vmatrix}=0$$

(по той же причине).

Окаймляющие миноры из первой, второй и третьей строк не составляем, так как они равны нулю (первая и вторая строки равны). Таким образом, все миноры третьего порядка равны нулю. Миноры четвертого порядка уже не вычисляем, все они также равны нулю. Следовательно, $r = 2$.

§ 2.4. Обратная матрица

Матрица называется *обратной* по отношению к данной, если ее умножение как справа, так и слева на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Для матрицы A обратная матрица обозначается A^{-1}. По определению,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Нахождение обратной матрицы называется *обращением* данной матрицы.

Квадратная матрица называется *неособенной*, или *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю. Если же определитель матрицы равен нулю, то матрица называется *особенной*, или *вырожденной*. Всякая неособенная матрица имеет обратную.

Пусть дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Обратную матрицу A^{-1} находят по следующей схеме:

I ш а г. Вычисляют определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

II ш а г. Вычисляют алгебраические дополнения к элементам матрицы A и составляют матрицу, союзную по отношению к данной.

Если из алгебраических дополнений всех элементов матрицы A составить новую матрицу и транспонировать ее, то полученная матрица называется *союзной* по отношению к данной и обозначается $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}.$$

III шаг. Находят обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| & A_{41}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| & A_{42}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| & A_{43}/|A| \\ A_{14}/|A| & A_{24}/|A| & A_{34}/|A| & A_{44}/|A| \end{bmatrix}.$$

Если порядок матрицы A большой, то этот метод обращения матрицы требует сложной вычислительной работы. Существуют другие способы обращения матрицы, рассмотренные ниже.

Нахождение обратной матрицы A^{-1} имеет исключительно важное значение для решения систем линейных уравнений.

Пример. Обратить матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение I шаг. Вычисляем

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

для чего разложим определитель по элементам первой строки. Имеем

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1+2-6-3 = -8;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3-1+3+2) = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9-1+12-9+2-6 = 7;$$

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -(1-4+3+6) = -6.$$

Следовательно

$$\det A = 1 \cdot (-8) + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 7 + 2 \cdot (-6) = 6.$$

II шаг. Вычисляем остальные алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 4 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-(-2+8+4-12)=2;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ -2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-1-4-2+8=1;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-(3-2-8+6+4-2)=-1;$$

$$A_{24}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=2-16+12+2=0;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2-24-4-4=-30;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-(1+12+2-12)=-3;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=1+6+12+2+6-6=21;$$

$$A_{34}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-(-2+24+4-2)=-24;$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=-(2-36-2-6-6-4)=52;$$

$$A_{42}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=1+24-6+4-12-3=8;$$

$$A_{43}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-(1+12+18+4+9-6)=-38$$

$$A_{44}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=-1-4+36+8-3+6=42.$$

III шаг. Составляем союзную матрицу

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 & 2 & -30 & 52 \\ -1 & 1 & -3 & 8 \\ 7 & -1 & 21 & -38 \\ -6 & 0 & -24 & 42 \end{bmatrix}.$$

Делим все элементы союзной матрицы на $|A| = 6$ и получаем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -8/6 & 2/6 & -30/6 & 52/6 \\ -1/6 & 1/6 & -3/6 & 8/6 \\ 7/6 & -1/6 & 21/6 & -38/6 \\ -6/6 & 0 & -24/6 & 42/6 \end{bmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8/6 & 2/6 & -30/6 & 52/6 \\ -1/6 & 1/6 & -3/6 & 8/6 \\ 7/6 & -1/6 & 21/6 & -38/6 \\ -6/6 & 0 & -24/6 & 42/6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{-8-2+28-12}{6} & \frac{2+2-4+0}{6} & \frac{-30-6+84-48}{6} & \frac{52+16-152+84}{6} \\ \frac{-24-1+7+18}{6} & \frac{6+1-1+0}{6} & \frac{-90-3+21+72}{6} & \frac{156+8-38-126}{6} \\ \frac{16-3-7-6}{6} & \frac{-4+3+1+0}{6} & \frac{60-9-21-24}{6} & \frac{-104+24+38+42}{6} \\ \frac{8-2+0-6}{6} & \frac{-2+2+0+0}{6} & \frac{30-6+0-24}{6} & \frac{-52+16+0+42}{6} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E.$$

§ 2.5. Абсолютная величина и норма матрицы

Под *абсолютной величиной* (модулем) *матрицы* $A = [a_{ij}]$ понимается матрица $|A| = [|a_{ij}|]$, где все элементы $|a_{ij}|$ есть модули элементов матрицы A.

Под *нормой* матрицы $A = [a_{ij}]$ понимается действительное число $\|A\|$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\|A\| \geqslant 0$ (причем $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$);

2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, где α — число (причем $\|-A\| = \|A\|$);

3) $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$;

4) $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$,

где A и B — матрицы, для которых соответствующие операции имеют смысл.

Матрица $A = [a_{ij}]$ определяется тремя нормами:

1) $\| A \|_1 = \max\limits_i \sum\limits_j | a_{ij} |$ — норма 1 — *максимальная сумма модулей элементов матрицы по строкам;*

2) $\| A \|_2 = \max\limits_j \sum\limits_i | a_{ij} |$ — норма 2 — *максимальная сумма модулей элементов матрицы по столбцам.*

3) $\| A \|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i,j} | a_{ij} |^2}$ — норма 3 — *корень квадратный из суммы квадратов модулей всех элементов матрицы.*

Пример 1. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

вычислить $\| A \|_1$, $\| A \|_2$ и $\| A \|_3$.

Решение. Находим

$$\| A \|_1 = \max (2 + 1 + 4,\ 5 + 3 + 2,\ 6 + 7 + 3) = \max (7,\ 10,\ 16) = 16,$$

$$\| A \|_2 = \max (2 + 5 + 6,\ 1 + 3 + 7,\ 4 + 2 + 3) = \max (13,\ 11,\ 9) = 13,$$

$$\| A \|_3 = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 6^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{153} = 12{,}2.$$

Для вектора $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ эти нормы вычисляются по следующим формулам:

$\| X \|_1 = \max | x_i |$ — *максимальная из координат вектора, взятая по модулю;*

$\| X \|_2 = | x_1 | + | x_2 | + \ldots + | x_n |$ — *сумма модулей координат вектора;*

$\| X \|_3 = \sqrt{| x_1 |^2 + | x |_2 + \ldots + | x_n |^2}$ — *корень квадратный из суммы квадратов модулей координат вектора.*

Норма $\| X \|_3$ называется *абсолютной величиной вектора.*

Пример 2. Для вектора

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

вычислить $\| X \|_1$, $\| X \|_2$ и $\| X \|_3$.

Решение. Имеем

$$\| X \|_1 = \max (1,\ 2,\ 3,\ 5) = 5;$$

$$\| X \|_2 = 1 + 2 + 3 + 5 = 11;$$

$$\| X \|_3 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{39} = 6{,}2.$$

§ 2.6. Клеточные матрицы. Действия над клеточными матрицами

При выполнении вычислений над матрицами высоких порядков целесообразно разбить их на клетки (блоки) с помощью горизонтальных и вертикальных перегородок, идущих вдоль и поперек всей матрицы. Таким образом, каждая матрица разбивается на подматрицы меньших порядков, вычислительные действия над которыми производить значительно проще.

Разбиение квадратных матриц на клетки. Рассмотрим два метода разбиения квадратных матриц на клетки.

Первый метод. Данную матрицу S четвертого порядка можно разбить на четыре квадратные матрицы A, B, C, D второго порядка:

$$S=\left[\begin{array}{cc|cc} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ \hline s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right],$$

где

$$A=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} s_{13} & s_{14} \\ s_{23} & s_{24} \end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix} s_{31} & s_{32} \\ s_{41} & s_{42} \end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix} s_{33} & s_{34} \\ s_{43} & s_{44} \end{bmatrix}.$$

Над клеточными матрицами такого типа можно производить операции сложения и умножения, оперируя с клетками матрицы, как с элементами обычной матрицы.

Пусть

$$S=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right],\quad P=\left[\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array}\right]$$

— клеточные матрицы одного и того же типа и разбиения, тогда

$$S+P=\left[\begin{array}{c|c} A+K & B+L \\ \hline C+M & D+N \end{array}\right],\quad S\cdot P=\left[\begin{array}{c|c} AK+BM & AL+BN \\ \hline CK+DM & CL+DN \end{array}\right].$$

Пример 1. Матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

разбить на квадратные клетки и вычислить $A+B$ и AB.

Р е ш е н и е. 1) Разобьем матрицы A и B на квадратные клетки следующим образом:

$$A=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ \hline 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{array}\right]; \quad B=\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right].$$

2) Находим

$$A+B=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ \hline A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 9 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 7 & 2 & 5 \\ 10 & 9 & 0 & 7 \end{array}\right].$$

3) Имеем

$$AB=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{array}\right].$$

Последовательно получаем

$$A_{11}B_{11}=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19 & 31 \\ 19 & 32 \end{bmatrix},$$

$$A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -11 & -25 \\ -14 & -32 \end{bmatrix}, \quad A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}B_{11}=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 24 \\ 18 & 31 \end{bmatrix},$$

$$A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & -17 \\ -8 & -22 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 10 & 9 \end{bmatrix};$$

$$A_{11}B_{12}=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 43 & 55 \\ 45 & 58 \end{bmatrix},$$

$$A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -39 & -53 \\ -50 & -68 \end{bmatrix},$$

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -10 \end{bmatrix};$$

$$A_{21}B_{12}=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 34 & 44 \\ 44 & 57 \end{bmatrix}, \quad A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -27 & -37 \\ -36 & -50 \end{bmatrix}, \quad A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$AB=\left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ \hline 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{array}\right].$$

Второй метод. Можно разбить матрицу n-го порядка на клетки так называемым *окаймлением*, т. е. на квадратную матрицу $(n-1)$-го порядка, окаймленную матрицей-строкой $(n-1)$-го порядка, матрицей-столбцом $(n-1)$-го порядка и матрицей первого порядка — числом:

$$A_n=\left[\begin{array}{c|c} & a_{1n} \\ & a_{2n} \\ A_{n-1} & \vdots \\ & a_{n-1,\,n} \\ \hline a_{n1}\,a_{n2}\ldots a_{n,\,n-1} & a_{nn}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & U_{n-1} \\ \hline V_{n-1} & a_{nn}\end{array}\right],$$

где A_{n-1} — квадратная матрица $(n-1)$-го порядка; U_{n-1} — матрица-столбец $(n-1)$-го порядка; V_{n-1}—матрица-строка $(n-1)$-го порядка; a_{nn}—число.

Действия над окаймленными матрицами производятся так же, как действия над клеточными матрицами.

Пусть

$$A=\begin{bmatrix} M & U \\ V & a\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} P & Y \\ X & b\end{bmatrix}$$

— две окаймленные матрицы n-го порядка. Тогда

$$A+B=\begin{bmatrix} M+P & U+Y \\ V+X & a+b\end{bmatrix},\qquad AB=\begin{bmatrix} MP+UX & MY+Ub \\ VP+aX & VY+ab\end{bmatrix},$$

где MP и UX — матрицы $(n-1)$-го порядка; MY и Ub — матрицы-столбцы $(n-1)$-го порядка; VP и aX — матрицы-строки $(n-1)$-го порядка; VY и ab — числа.

Пример 2. Матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3\end{bmatrix}\ \text{и}\ B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

разбить на клетки окаймлением и вычислить $A+B$ и AB.

Решение. 1) Разбиваем матрицы A и B с помощью окаймления:

$$A=\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ \hline 4 & 7 & -3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} M & U \\ \hline V & a\end{array}\right],\qquad B=\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ \hline 9 & 6 & 5\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} P & Y \\ \hline X & b\end{array}\right].$$

2) Находим

$$A+B=\begin{bmatrix} M+P & U+Y \\ V+X & a+b\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c} 8 & 10 & 1 \\ 10 & 8 & -2 \\ \hline 13 & 13 & 2\end{array}\right].$$

3) Имеем

$$AB=\begin{bmatrix} MP+UX & MY+Ub \\ VP+aX & VY+ab \end{bmatrix}.$$

Последовательно получаем

$$MP=\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 47 & 2 \\ 54 & 3 \end{bmatrix},\quad UX=\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}\cdot[9\quad 6]=\begin{bmatrix} -36 & -24 \\ -45 & -30 \end{bmatrix},$$

$$MP+UX=\begin{bmatrix} 11 & -22 \\ 9 & -27 \end{bmatrix};$$

$$MY=\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 49 \\ 57 \end{bmatrix},\quad Ub=\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}\cdot 5=\begin{bmatrix} -20 \\ -25 \end{bmatrix},\quad MY+Ub=\begin{bmatrix} 29 \\ 32 \end{bmatrix};$$

$$VP=[4\quad 7]\cdot\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}=[40\quad 1],\quad aX=(-3)\cdot[9\quad 6]=[-27\quad -18],$$

$$VP+aX=[13\quad -17];$$

$$VY=[4\ 7]\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}=41,\quad ab=(-3)\cdot 5=-15,\quad VY+ab=26.$$

Таким образом,

$$AB=\left[\begin{array}{cc|c} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ \hline 13 & -17 & 26 \end{array}\right].$$

Обращение матриц разбиением на клетки. Пусть $S=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ — клеточная матрица, в которой A и D — квадратные клетки порядков p и q (где $p+q=n$). Нам нужно найти обратную матрицу $S^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array}\right]$, в которой K и N — квадратные матрицы также порядков p и q.

По определению обратной матрицы, $SS^{-1}=E_n$. Но единичная матрица в данном случае тоже будет разбита на клетки аналогичным образом, т. е. $E_n=\begin{bmatrix} E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{bmatrix}$, где E_p и E_q — единичные матрицы, соответственно порядков p и q. Тогда

$$SS^{-1}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AK+BM & AL+BN \\ CK+DM & CL+DN \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{bmatrix}.$$

Приравнивая элементы матрицы-произведения элементам единичной матрицы, выводим следующие формулы для определения клеток обратной матрицы.

Первая группа формул (обращение начинается с вычисления A^{-1}):

$$\left.\begin{aligned} N&=(D-CA^{-1}B)^{-1}, \\ M&=-NCA^{-1}, \\ L&=-A^{-1}BN, \\ K&=A^{-1}-A^{-1}BM. \end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

Вторая группа формул (обращение начинается с вычисления D^{-1}):

$$\left.\begin{aligned} K&=(A-BD^{-1}C)^{-1},\\ L&=-KBD^{-1},\\ M&=-D^{-1}CK,\\ N&=D^{-1}-D^{-1}CL. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эти формулы выведены в предположении, что все указанные обращения матриц выполнимы. Таким образом, обращение матрицы порядка n сводится к обращению двух матриц порядков p и q и к нескольким матричным умножениям.

Пример 3. Обратить матрицу

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

при помощи разбиения на клетки.

Решение. 1) Разбиваем данную матрицу S на клетки:

$$S=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 3 & 1\\ \hline 4 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A & B\\ \hline C & D \end{array}\right]; \quad S^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} K & L\\ \hline M & N \end{array}\right].$$

Для вычислений возьмем первую группу формул.

2) Вычисляем матрицу A^{-1}:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad |A|=2;$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|}\\ \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} &A_{11}=a_{22}=2, \quad A_{21}=-a_{12}=0,\\ &A_{12}=-a_{21}=1, \quad A_{22}=a_{11}=1; \end{aligned}$$

следовательно,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 2/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Образуем произведения

$$A^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 2 & 3/2 \end{bmatrix},$$

$$CA^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 0\\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0\\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(CA^{-1})B=\begin{bmatrix} 4 & 0\\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8\\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C(A^{-1}B)=\begin{bmatrix} 4 & 0\\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 2 & 3/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8\\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

[для контроля вычисляем последнюю матрицу дважды — как $(CA^{-1})B$ и как $C(A^{-1}B)$].

3) Составим матрицу

$$D-CA^{-1}B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 8\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -7\\ -3 & -1\end{bmatrix}$$

и находим обратную ей матрицу $N=(D-CA^{-1}B)^{-1}$.

Имеем $\det(D-CA^{-1}B)=6-21=-15$. Обозначим

$$\begin{bmatrix}-6 & -7\\ -3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix},$$

тогда алгебраические дополнения $P_{11}=p_{22}=-1$; $P_{21}=-p_{12}=7$, $P_{12}=-p_{21}=3$; $P_{22}=p_{11}=-6$. Следовательно,

$$N=(D-CA^{-1}B)^{-1}=\begin{bmatrix}1/15 & -7/15\\ -3/15 & 6/15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/15 & -7/15\\ -1/5 & 2/5\end{bmatrix}.$$

4) Вычисляем матрицы

$$M=-NCA^{-1}=-\begin{bmatrix}1/15 & -7/15\\ -1/5 & 2/5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=-\begin{bmatrix}-3/15 & -7/15\\ -2/5 & 2/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5 & 7/15\\ 2/5 & -2/5\end{bmatrix};$$

$$L=-A^{-1}BN=-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/15 & -7/15\\ -1/5 & 2/5\end{bmatrix}=$$

$$=-\begin{bmatrix}-5/15 & 5/15\\ -5/30 & -5/15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3 & -1/3\\ 1/6 & 1/3\end{bmatrix};$$

$$A^{-1}BM=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/5 & 7/15\\ 2/5 & -2/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1/3\\ 1 & 1/3\end{bmatrix};$$

$$K=A^{-1}-A^{-1}BM=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -1/3\\ 1 & 1/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1/3\\ -1/2 & 1/6\end{bmatrix}.$$

В результате получаем

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}K & L\\ M & N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1/3 & 1/3 & -1/3\\ -1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/3\\ 1/5 & 7/15 & 1/15 & -7/15\\ 2/5 & -2/5 & -1/5 & 2/5\end{bmatrix}.$$

Обращение клеточных окаймленных матриц. Пусть

$$A=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,n-1} & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \\ a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2} & \ldots & a_{n-1,\,n-1} & a_{n-1,n}\\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,\,n-1} & a_{nn}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{n-1} & U_{n-1}\\ V_{n-1} & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

Будем считать, что данная матрица A получена в результате окаймления матрицы A_{n-1} порядка $n-1$ матрицей-строкой $V_{n-1}=$

$= [a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{n,\, n-1}]$, матрицей-столбцом $U_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1,\, n} \end{bmatrix}$, также имеющими порядок $n - 1$, и числом a_{nn}.

Матрица A^{-1}, обратная данной, тоже имеет вид окаймленной матрицы

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} P_{n-1} & R_{n-1} \\ Q_{n-1} & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix},$$

в которой искомые величины таковы: P_{n-1} — матрица $(n - 1)$-го порядка; R_{n-1} — матрица-столбец $(n - 1)$-го порядка; Q_{n-1} — матрица-строка $(n - 1)$-го порядка; $\dfrac{1}{\alpha_n}$ — число.

Применяя правило умножения окаймленных матриц, имеем

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & U_{n-1} \\ V_{n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{n-1} & R_{n-1} \\ Q_{n-1} & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{n-1} P_{n-1} + U_{n-1} Q_{n-1} & A_{n-1} R_{n-1} + \dfrac{U_{n-1}}{\alpha_n} \\ V_{n-1} P_{n-1} + a_{nn} Q_{n-1} & V_{n-1} R_{n-1} + \dfrac{a_{nn}}{\alpha_n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приравнивая элементы матрицы-произведения соответствующим элементам единичной матрицы, получаем следующие формулы для вычисления элементов обратной матрицы A^{-1}:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= a_{nn} - V_{n-1} A_{n-1}^{-1} U_{n-1}, \\ R_{n-1} &= -A_{n-1}^{-1} U_{n-1} \alpha_n \\ Q_{n-1} &= -\frac{V_{n-1} A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n}, \\ P_{n-1} &= A_{n-1}^{-1} + \frac{A_{n-1} U_{n-1} V_{n-1} A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Таким образом, обращение окаймленной матрицы n-го порядка сводится к обращению одной матрицы $(n - 1)$-го порядка и нескольким матричным умножениям.

При этом для нахождения элементов обратной матрицы A^{-1} применяется следующая схема.

1. Пусть элементы матрицы A^{-1} обозначены через d_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, а элементы матрицы A_{n-1}^{-1} — через d'_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n - 1)$.

Тогда

$$A_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & \dots & d'_{1\ n-1} \\ d'_{21} & d'_{22} & \dots & d'_{2,\ n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d'_{n-1,\ 1} & d'_{n-1,\ 2} & \dots & d'_{n-1,\ n-1} \end{bmatrix}.$$

2. Вычисляют элементы строки-произведения — $V_{n-1}A_{n-1}^{-1}$ и столбца-произведения — $A_{n-1}^{-1}U_{n-1}$, обозначив их соответственно

$$-V_{n-1}A_{n-1}^{-1}=[\gamma_{n1}\ \gamma_{n2}\dots\ \gamma_{n,\ n-1}];$$

$$-A_{n-1}^{-1}U_{n-1}=\begin{bmatrix} \beta_{1n} \\ \beta_{2n} \\ \vdots \\ \beta_{n-1,\ n} \end{bmatrix}.$$

3. Определяют число α_n:

$$\alpha_n=a_{nn}+\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni}\,\beta_{in}=a_{nn}+\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\,\gamma_{ni}.$$

Двойное вычисление числа α_n служит контролем предшествующих вычислений.

4. Находят все элементы матрицы A^{-1} по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} &d_{ik}=d'_{ik}+\frac{\beta_{in}\,\gamma_{nk}}{\alpha_n}\quad (i,\ k\leqslant n-1);\\ &d_{in}=\frac{\beta_{in}}{\alpha_n},\ d_{nk}=\frac{\gamma_{nk}}{\alpha_n}\ (i,\ k\leqslant n-1);\\ &d_{nn}=\frac{1}{\alpha_n}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Пример. Методом окаймления обратить матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -1 & 2 \\ \hline 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{n-1} & U_{n-1} \\ V_{n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Решение. I этап. Обращаем матрицу A_{n-1}:

$$A_{n-1}=\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ \hline 3 & -5 & -1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{n-2} & U_{n-2} \\ V_{n-1} & a_{n-1,\ n-1} \end{bmatrix}.$$

1) Находим матрицу A_{n-2}^{-1}. Имеем

$$A_{n-2}=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix};\quad \det A_{n-2}=-1;\quad A_{11}=-3,\quad A_{21}=4,\quad A_{12}=-2,\quad A_{22}=3;$$

следовательно,

$$A_{n-2}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}.$$

2) Производя матричные умножения, получаем элементы строки-произведения и столбца-произведения:

$$[\gamma_{31}\ \gamma_{32}]=-V_{n-2}\,A_{n-2}^{-1}=-[3\quad -5]\cdot\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}=[1\quad -3],$$

$$\begin{bmatrix}\beta_{13}\\ \beta_{23}\end{bmatrix}=-A_{n-2}^{-1}\,U_{n-2}=-\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11\\ -7\end{bmatrix}.$$

3) Находим число α_3 двумя способами:

$$\alpha_3=a_{33}+a_{31}\beta_{13}+a_{32}\beta_{23}=-1+3\cdot(-11)+(-5)\cdot(-7)=1;$$
$$\alpha_3=a_{33}+a_{13}\gamma_{31}+a_{23}\gamma_{32}=-1+5\cdot 1+1\cdot(-3)=1.$$

4) По формулам (4) вычисляем элементы матрицы A_{n-1}^{-1}:

$$d_{11}=d'_{11}+\frac{\beta_{13}\gamma_{31}}{\alpha_3}=3+\frac{(-11)\cdot 1}{1}=-8;$$

$$d_{12}=d'_{12}+\frac{\beta_{13}\gamma_{32}}{\alpha_3}=-4+\frac{(-11)\cdot(-3)}{1}=29;$$

$$d_{21}=d'_{21}+\frac{\beta_{23}\gamma_{31}}{\alpha_3}=2+\frac{(-7)\cdot 1}{1}=-5;$$

$$d_{22}=d'_{22}+\frac{\beta_{23}\gamma_{32}}{\alpha_3}=-3+\frac{(-7)\cdot(-3)}{1}=18;$$

$$d_{13}=\frac{\beta_{13}}{\alpha_3}=\frac{-11}{1}=-11;\quad d_{31}=\frac{\gamma_{31}}{\alpha_3}=\frac{1}{1}=1;$$

$$d_{23}=\frac{\beta_{23}}{\alpha_3}=\frac{-7}{1}=-7;\quad d_{32}=\frac{\gamma_{32}}{\alpha_3}=\frac{-3}{1}=-3;$$

$$d_{33}=\frac{1}{\alpha_3}=\frac{1}{1}=1.$$

Таким образом, получаем

$$A_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

II этап. Обращаем матрицу A:

$$A=\left[\begin{array}{rrr|r}3 & -4 & 5 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ 3 & -5 & -1 & 2\\ \hline 3 & -1 & 4 & 1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{n-1} & U_{n-1}\\ V_{n-1} & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

1) Матрица A_{n-1}^{-1} была определена на I этапе.

2) Производим матричные умножения:

$$[\gamma_{41}\ \gamma_{42}\ \gamma_{43}]=-V_{n-1}\,A_{n-1}^{-1}=-[3\quad -1\quad 4]\cdot\begin{bmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}=[15\quad -57\quad 22];$$

$$\begin{bmatrix}\beta_{14}\\ \beta_{24}\\ \beta_{34}\end{bmatrix}=A_{n-1}^{-1}U_n=\begin{bmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\ -4\\ 1\end{bmatrix}.$$

3) Вычисляем α_4:

$$\alpha_4=a_{44}+a_{41}\beta_{14}+a_{42}\beta_{24}+a_{43}\beta_{34}=1+3\cdot(-7)+(-1)\cdot(-4)+1\cdot 4=-12;$$
$$\alpha_4=a_{44}+a_{14}\gamma_{41}+a_{24}\gamma_{42}+a_{34}\gamma_{43}=1+0\cdot 15+1\cdot(-57)+2\cdot 22=-12.$$

4) Обозначив

$$A^{-1}=S=\begin{bmatrix}s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34}\\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44}\end{bmatrix},$$

по формулам (4) определяем элементы матрицы A^{-1}:

$$s_{11}=d_{11}+\frac{\beta_{14}\gamma_{41}}{\alpha_4}=-8+\frac{(-7)\cdot 15}{-12}=\frac{9}{12};$$
$$s_{12}=d_{12}+\frac{\beta_{14}\gamma_{42}}{\alpha_4}=29+\frac{(-7)\cdot(-57)}{-12}=-\frac{51}{12};$$
$$s_{13}=d_{13}+\frac{\beta_{14}\gamma_{43}}{\alpha_4}=-11+\frac{(-7)\cdot 22}{-12}=\frac{22}{12};$$
$$s_{21}=d_{21}+\frac{\beta_{24}\gamma_{41}}{\alpha_4}=-5+\frac{(-4)\cdot 15}{-12}=0;$$
$$s_{22}=d_{22}+\frac{\beta_{24}\gamma_{42}}{\alpha_4}=18+\frac{(-4)(-57)}{-12}=-\frac{12}{12};$$
$$s_{23}=d_{23}+\frac{\beta_{24}\gamma_{43}}{\alpha_4}=-7+\frac{(-4)\cdot 22}{-12}=\frac{4}{12};$$
$$s_{31}=d_{31}+\frac{\beta_{34}\gamma_{41}}{\alpha_4}=1+\frac{1\cdot 15}{-12}=-\frac{3}{12};$$
$$s_{32}=d_{32}+\frac{\beta_{34}\gamma_{42}}{\alpha_4}=-3+\frac{1\cdot(-57)}{-12}=\frac{21}{12};$$
$$s_{33}=d_{33}+\frac{\beta_{34}\gamma_{43}}{\alpha_4}=1+\frac{1\cdot 22}{-12}=-\frac{10}{12};$$
$$s_{14}=\frac{\beta_{14}}{\alpha_4}=\frac{7}{12};\quad s_{24}=\frac{\beta_{24}}{\alpha_4}=\frac{4}{12};\quad s_{34}=\frac{\beta_{34}}{\alpha_4}=-\frac{1}{12};$$
$$s_{41}=\frac{\gamma_{41}}{\alpha_4}=-\frac{15}{12};\quad s_{42}=\frac{\gamma_{42}}{\alpha_4}=\frac{57}{12};$$
$$s_{43}=\frac{\gamma_{43}}{\alpha_4}=-\frac{22}{12};\quad s_{44}=\frac{1}{\alpha_4}=-\frac{1}{12}.$$

Итак, окончательно находим

$$A^{-1}=S=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}9 & -51 & 22 & 7\\ 0 & -12 & 4 & 4\\ -3 & 21 & -10 & -1\\ -15 & 57 & -22 & -1\end{bmatrix}.$$

Матрицы более высоких порядков обращаются аналогично, постепенным увеличением порядка окаймленной матрицы, т. е. увеличением числа матричных умножений.

§ 2.7. Треугольные матрицы. Разложение матрицы на произведение двух треугольных матриц

Квадратная матрица называется *треугольной*, если элементы, стоящие выше или ниже главной диагонали, равны нулю. Если равны нулю элементы, стоящие выше главной диагонали, то матрица называется *нижней треугольной*; такова, например, матрица

$$T_1=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 \; \ldots & 0 \\ t_{21} & t_{22} \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если же равны нулю элементы, стоящие ниже главной диагонали, то матрица называется *верхней треугольной*; такова, например, матрица

$$T_2=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \ldots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} \ldots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов. Если $T = [t_{ij}]$ — треугольная матрица, то

$$\det T = t_{11}t_{22}\ldots t_{nn}.$$

Обратная матрица неособенной треугольной матрицы есть также треугольная матрица того же типа и структуры.

Если квадратная матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

имеет отличные от нуля *диагональные миноры* (так называются миноры определителя матрицы, у которых на главных диагоналях стоят диагональные элементы матрицы), т. е.

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \;\; \ldots, \quad \det A \neq 0,$$

то ее можно разложить на произведение двух треугольных матриц (верхней и нижней). Это разложение будет единственным, если диагональным элементам одной из треугольных матриц заранее дать отличные от нуля значения (например, положить их равными единице).

Пусть $A = T_1T_2$, где

$$T_1=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad T_2=\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ 0 & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Искомые элементы треугольных матриц T_1 и T_2 находят следующим образом:

1) Перемножают матрицы T_1 и T_2 (на примере матрицы четвертого порядка).

$$T_1\cdot T_2=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{11}r_{12} & t_{11}r_{13} & t_{11}r_{14} \\ t_{21} & t_{21}r_{12}+t_{22} & t_{21}r_{13}+t_{22}r_{23} & t_{21}r_{14}+t_{22}r_{24} \\ t_{31} & t_{31}r_{12}+t_{32} & t_{31}r_{13}+t_{32}r_{23}+t_{33} & t_{31}r_{14}+t_{32}r_{24}+t_{33}r_{34} \\ t_{41} & t_{41}r_{12}+t_{42} & t_{41}r_{13}+t_{42}r_{23}+t_{43} & t_{41}r_{14}+t_{42}r_{24}+t_{43}r_{34}+t_{44} \end{bmatrix}$$

2) Приравнивают соответствующие элементы матрицы-произведения элементам матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

а именно $t_{11} = a_{11}$; $t_{21} = a_{21}$; $t_{31} = a_{31}$; $t_{41} = a_{41}$; $t_{11}r_{12} = a_{12}$, ... После этого решают сначала одночленные, затем двучленные и т. д. уравнения.

Пример 1. Матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

разложить на произведение двух треугольных матриц.

Решение. 1) Введем обозначения

$$A=T_1T_2;\quad T_1=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}\quad T_2=\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произведем матричное умножение:

$$T_1T_2=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{11}r_{12} & t_{11}r_{13} \\ t_{21} & t_{21}r_{12}+t_{22} & t_{21}r_{13}+t_{22}r_{23} \\ t_{31} & t_{31}r_{12}+t_{32} & t_{31}r_{13}+t_{32}r_{23}+t_{33} \end{bmatrix}.$$

2) Составим уравнения

$$t_{11}=1;\quad t_{11}\,r_{12}=2;\qquad t_{11}\,r_{13}=-3;$$
$$t_{21}=3;\quad t_{21}\,r_{12}+t_{22}=2;\qquad t_{21}\,r_{13}+t_{22}\,r_{23}=-4;$$
$$t_{31}=2;\quad t_{31}\,r_{12}+t_{32}=-1;\quad t_{31}\,r_{13}+t_{32}\,r_{23}+t_{33}=1.$$

3) Решаем эти уравнения:

$$t_{11}=1,\quad r_{12}=\frac{2}{1}=2;\qquad r_{13}=\frac{-3}{1}=-3;$$
$$t_{21}=3;\quad t_{22}=2-3\cdot 2=-4;\quad r_{23}=\frac{-4-3\cdot(-3)}{-4}=-\frac{5}{4};$$
$$t_{31}=2;\quad t_{32}=-1-2\cdot 2=-5;\quad t_{33}=1-2\cdot(-3)-\frac{5\cdot 5}{4}=\frac{}{4}.$$

Таким образом,

$$T_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & 0\\ 2 & -5 & 3/4\end{bmatrix},\qquad T_2=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -5/4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Пользуясь разложением квадратной матрицы A на произведение двух треугольных, можно легко вычислять обратную матрицу A^{-1}, а именно, если $A = T_1T_2$, то

$$A^{-1}=T_2^{-1}\,T_1^{-1}.$$

Обратные матрицы для треугольных находятся сравнительно просто.

Пример 2. Для матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{bmatrix}$$

найти обратную, разложив данную матрицу на произведение двух треугольных.

Решение. 1) Сначала вычисляем

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 2\end{vmatrix}=-30-30-28+25+48+28=13\neq 0.$$

2) Данную матрицу разбиваем на произведение двух треугольных:

$$T_1=\begin{bmatrix}t_{11} & 0 & 0\\ t_{21} & t_{22} & 0\\ t_{31} & t_{32} & t_{33}\end{bmatrix};\qquad T_2=\begin{bmatrix}1 & r_{12} & r_{13}\\ 0 & 1 & r_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$T_1\,T_2=\begin{bmatrix}t_{11} & t_{11}\,r_{12} & t_{11}\,r_{13}\\ t_{21} & t_{21}\,r_{12}+t_{22} & t_{21}\,r_{13}+t_{22}\,r_{23}\\ t_{31} & t_{31}\,r_{12}+t_{32} & t_{31}\,r_{13}+t_{32}\,r_{23}+t_{33}\end{bmatrix}.$$

Составляем уравнения:

$$t_{11}=2;\quad t_{11}r_{12}=-3;\quad t_{11}r_{13}=1;$$
$$t_{21}=4;\quad t_{21}r_{12}+t_{22}=-5;\quad t_{21}r_{13}+t_{22}r_{23}=2;$$
$$t_{31}=5;\quad t_{31}r_{12}+t_{32}=-7;\quad t_{31}r_{13}+t_{32}r_{23}+t_{33}=3.$$

Решая эти уравнения, находим $t_{11}=2$; $r_{12}=-3/2$; $r_{13}=1/2$; $t_{21}=4$; $t_{22}=-5+6=1$; $r_{23}=2-2=0$; $t_{31}=5$; $t_{32}=-7+15/2=1/2$; $t_{33}=3-5/2=1/2$. Следовательно,

$$T_1=\begin{bmatrix}2&0&0\\4&1&0\\5&1/2&1/2\end{bmatrix};\quad T_2=\begin{bmatrix}1&-3/2&1/2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

3) Для нахождения обратной матрицы $A^{-1}=T_2^{-1}T_1^{-1}$ необходимо определить T_2^{-1} и T_1^{-1}.

Обратим матрицу T_2; обратной для нее является верхняя треугольная матрица, элементы главной диагонали которой равны 1. Положим

$$T_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&r_{12}&r_{13}\\0&1&r_{23}\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Тогда $T_2T_2^{-1}=E$, или

$$T_2T_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3/2&1/2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&r_{12}&r_{13}\\0&1&r_{23}\\0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&r_{12}-\dfrac{3}{2}&r_{13}-\dfrac{3}{2}r_{23}+\dfrac{1}{2}\\0&1&r_{23}\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Составляем уравнения

$$r_{12}-\frac{3}{2}=0;\quad r_{13}-\frac{3}{2}r_{23}+\frac{1}{2}=0;\quad r_{23}=0.$$

Отсюда находим $r_{12}=3/2$; $r_{13}=-1/2$. Следовательно,

$$T_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&3/2&-1/2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Переходим к нахождению матрицы, обратной по отношению к T_1; T_1^{-1} также будет верхней треугольной матрицей. Положим

$$T_1^{-1}=\begin{bmatrix}t_{11}&0&0\\t_{21}&t_{22}&0\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{bmatrix};$$

Тогда

$$T_1T_1^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\4&1&0\\5&1/2&1/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t_{11}&0&0\\t_{21}&t_{22}&0\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{bmatrix}=$$

$$= \begin{bmatrix} 2t_{11} & 0 & 0 \\ 4t_{11}+t_{21} & t_{22} & 0 \\ 5t_{11}+\frac{1}{2}t_{21}+\frac{1}{2}t_{31} & \frac{1}{2}t_{22}+\frac{1}{2}t_{32} & \frac{1}{2}t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составляем уравнения:

$$2t_{11}=1; \quad 4t_{11}+t_{21}=0; \quad t_{22}=1;$$
$$5t_{11}+\frac{1}{2}t_{21}+\frac{1}{2}t_{31}=0; \quad \frac{1}{2}t_{22}+\frac{1}{2}t_{32}=0; \quad \frac{1}{2}t_{33}=1.$$

Отсюда находим

$$t_{11}=1/2; \quad t_{21}=(-4)\cdot(1/2)=-2; \quad t_{22}=1;$$
$$t_{31}=\frac{(-5)\cdot(1/2)-(1/2)\cdot(-2)}{1/2}=-3; \quad t_{32}=\frac{-1/2}{1/2}=-1; \quad t_{33}=\frac{1}{1/2}=2.$$

Следовательно,

$$T_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4) Теперь можно найти матрицу, обратную данной:

$$A^{-1}=T_2^{-1}T_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

§ 2.8. Понятие о системе линейных уравнений

В общем виде *система m линейных уравнений с n неизвестными* записывается так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n=b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Уравнения системы считаются пронумерованными: первое, второе, ..., m-е. Числа x_1, x_2, ..., x_n называются *неизвестными* системы; a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn} — *коэффициентами* при неизвестных системы.

Коэффициент при неизвестном x_{ij} в i-м уравнении обозначается через a_{ij}, где первый индекс i указывает номер уравнения, в котором находится данный коэффициент, а второй индекс j — номер неизвестного, при котором находится данный коэффициент. Например, коэффициент a_{23} находится во втором уравнении системы при неизвестном x_3.

Числа b_1, b_2, ..., b_m называются *свободными членами* системы.

Кратко система (1) может быть записана так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (1')$$

Решением системы линейных уравнений (1) называется любая совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, которая будучи подставленной на место неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в уравнения данной системы, обращает все эти уравнения в тождества.

Система линейных уравнений (1) называется *совместной*, если она имеет решение. Если система линейных уравнений не имеет решения, то она называется *несовместной*, или *противоречивой*.

Совместная система линейных уравнений может иметь одно или несколько решений и называется *определенной*, если имеет одно единственное решение, и *неопределенной*, если имеет больше одного решения.

Две системы линейных уравнений с одним и тем же числом неизвестных называется *эквивалентными*, если они или обе несовместны, или обе совместны и имеют одни и те же решения.

В этой главе мы будем рассматривать системы n линейных уравнений с n неизвестными, т. е. системы вида

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + a_{in} x_n = b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nj} x_j + \ldots + a_{nn} x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2)$$

§ 2.9. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Решение матричных уравнений

Пусть дана определенная система n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Данную систему, пользуясь матричными обозначениями, можно записать в следующем виде:

$$AX = B, \qquad (2)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *матрицей системы* (1), а векторы X и B — соответственно *вектором-столбцом неизвестных* системы и *вектором-столбцом* ее *свободных членов*.

В матричном виде систему (1) можно записать и так:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \qquad (2')$$

Рассмотрим три вида матричных уравнений и способы их решения.

I. *Матричное уравнение вида* $AX = B$. Для решения данного уравнения умножим слева обе его части на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Но произведение $A^{-1}A = E$, следовательно, $EX = A^{-1}B$, откуда

$$X = A^{-1}B. \qquad (3)$$

Пример 1. Используя матричную запись, решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде $AX = B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Находим A^{-1}:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{11} = -6; \quad A_{21} = -2; \quad A_{31} = 4;$$

$$A_{12} = 0; \quad A_{22} = -4; \quad A_{32} = 2; \quad A_{13} = 6; \quad A_{23} = 3; \quad A_{33} = -3;$$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Теперь, пользуясь формулой (3), получаем

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Окончательный ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$.

Если имеется несколько систем линейных уравнений, имеющих одинаковые матрицы системы, то их можно объединить в одно матричное уравнение и решать одновременно.

Пример 2. Даны три системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=1, \\ 3x_1-4x_2 \qquad =2, \\ 2x_1-5x_2+3x_3=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4-3x_5+2x_6=5, \\ 3x_4-4x_5 \qquad =7, \\ 2x_4-5x_5+3x_6=9; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7-3x_8+2x_9=-5, \\ 3x_7-4x_8 \qquad =-2, \\ 2x_7-5x_8+3x_9=-7. \end{cases}$$

Найти их решения.

Решение. Составляем матричное уравнение $AX = B$, где

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & 7 & -2 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

— соответственно матрица системы, матрица неизвестных и матрица свободных членов. Матрица-решение имеет вид $X = A^{-1}B$.

Находим A^{-1}:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}=1; \quad A_{11}=-12; \quad A_{21}=-1; \quad A_{31}=8;$$

$$A_{12}=-9; \quad A_{22}=-1; \quad A_{32}=6; \quad A_{13}=-7; \quad A_{23}=-1; \quad A_{33}=5;$$

$$A^{-1}=\widetilde{A}=\begin{bmatrix} -12 & -1 & 8 \\ -9 & -1 & 6 \\ -7 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} -12 & -1 & 8 \\ -9 & -1 & 6 \\ -7 & -1 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & 7 & -2 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, решения данных систем таковы:

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1;\ x_4 = 5,\ x_5 = 2,\ x_6 = 3;\ x_7 = 6,\ x_8 = 5,\ x_9 = 2.$

II. *Матричное уравнение вида* $XA = B$. Для решения уравнения умножим справа обе его части на A^{-1}:

$$XAA^{-1} = BA^{-1}.$$

Значит, $XE = BA^{-1}$, откуда

$$X = BA^{-1}. \tag{4}$$

Пример 3. Решить матричное уравнение

$$X\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Находим A^{-1}:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-3; \quad A_{11}=-1; \quad A_{21}=-1; \quad A_{31}=0; \quad A_{12}=-1;$$

$$A_{22}=2; \quad A_{32}=-3; \quad A_{13}=1; \quad A_{23}=1; \quad A_{33}=-3;$$

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

По формуле (4) получаем

$$X=BA^{-1}=\begin{bmatrix}6 & 2 & -1\\ 6 & 1 & 1\\ 8 & -1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 0\\ 1/3 & -2/3 & 1\\ -1/3 & -1/3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

III. *Матричное уравнение вида* $AXB = C$. Для решения уравнения умножим обе его части — слева на A^{-1}, а справа на B^{-1}; тогда получим

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$

или

$$EXE = A^{-1}CB^{-1},$$

откуда

$$X = A^{-1}CB^{-1}. \tag{5}$$

Пример 4 Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 0\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix}\cdot X\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -4 & -4\\ 18 & 5 & 10\\ 17 & -3 & -1\end{bmatrix}.$$

Решение. Находим

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-12 & -1 & 8\\ -9 & -1 & 6\\ -7 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

(см. пример 2). Теперь вычисляем

$$A^{-1}C=\begin{bmatrix}-12 & -1 & 8\\ -9 & -1 & 6\\ -7 & -1 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8 & -4 & -4\\ 18 & 5 & 10\\ 17 & -3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 19 & 30\\ 12 & 13 & 20\\ 11 & 8 & 13\end{bmatrix}.$$

Находим B^{-1}:

$$\det B=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-4;\quad B_{11}=-1;\quad B_{21}=-1;\quad B_{31}=1;$$

$$B_{12}=-4;\quad B_{22}=8;\quad B_{32}=-4;\quad B_{13}=3;\quad B_{23}=-5;\quad B_{33}=1;$$

$$\widetilde{B}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -4 & 8 & -4\\ 3 & -5 & 1\end{bmatrix};\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1 & -2 & 1\\ -3/4 & 5/4 & -1/4\end{bmatrix}.$$

По формуле (5) получаем

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{bmatrix}22 & 19 & 30\\ 12 & 13 & 20\\ 11 & 8 & 13\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1 & -2 & 1\\ -3/4 & 5/4 & -1/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}.$$

§ 2.10. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений

Пусть дана система линейных уравнений (для простоты рассмотрим систему четвертого порядка)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4. \end{cases} \qquad (1)$$

Введем следующие обозначения:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}.$$

Здесь D — определитель системы, а D_1, D_2, D_3 и D_4 — определители, получающиеся в результате замены столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном столбцом свободных членов.

Если $D \neq 0$, то система (1) является о п р е д е л е н н о й, т. е. имеет единственное решение. Это решение можно найти по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad x_4 = \frac{D_4}{D}, \qquad (2)$$

которые называются *формулами Крамера*.

Пример. Решить по формулам Крамера систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 \qquad + 3x_4 = -5. \end{cases}$$

Решение Находим определители D, D_1, D_2, D_3 и D_4, раскладывая их на миноры по элементам последней строки, а затем применяя правило треугольников:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 0-3\cdot 5+3\cdot 0=-15$$

(первый и третий определители равны нулю, так как имеют пропорциональные столбцы);

$$D_1=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+3\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=5\cdot 0-3\cdot 5+3\cdot 0=-15;$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & -4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-1\cdot 5-5\cdot 5+3\cdot 10=0;$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -5 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+5\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 5-3\cdot 15+5\cdot(-5)+3\cdot 10=-45;$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & -5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}-$$

$$-5\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 0-3(-10)-5\ 0=30.$$

Теперь по формулам Крамера получаем решение системы:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-15}{-15} = 1; \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-15} = 0;$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-45}{-15} = 3; \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{30}{-15} = -2.$$

Заметим, что решение системы линейных уравнений по формулам Крамера очень громоздко. На практике такие системы обычно решают другими методами.

§ 2.11. Решение системы линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса)

Наиболее распространенным методом решения систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных. Но прежде, чем перейти к объяснению этого метода, необходимо познакомиться с элементарными преобразованиями систем линейных уравнений.

Элементарными преобразованиями называются следующие три типа преобразований систем линейных уравнений:

1) перестановка двух уравнений системы;

2) умножение обеих частей уравненя системы на любое отличное от нуля число;

3) прибавление (вычитание) к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое отличное от нуля число.

Можно доказать, что элементарные преобразования переводят данную систему линейных уравнений в эквивалентную. Выполнение элементарных преобразований равносильно выражению одного неизвестного через другие.

Метод последовательного исключения неизвестных (*метод Гаусса*) рассмотрим на примере системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \end{cases} \tag{1}$$

Будем исключать неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Назовем x_1 *ведущим неизвестным*, а коэффициент a_{11} — *ведущим коэффициентом*. Разделив первое уравнение на a_{11} (это возможно, если $a_{11} \neq 0$), получим

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{a_{15}}{a_{11}}.$$

Обозначим

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = b_{12}, \quad \frac{a_{13}}{a_{11}} = b_{13}, \quad \frac{a_{14}}{a_{11}} = b_{14}, \quad \frac{a_{15}}{a_{11}} = b_{15}$$

и вообще $b_{ij} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$ $(j > 1)$. Тогда рассматриваемое уравнение примет вид

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \tag{2}$$

или

$$x_1 = b_{15} - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4.$$

Для исключения неизвестного x_1 из уравнений системы (1) проведем следующие преобразования.

1) Из второго уравнения системы (1) вычтем уравнение (2), умноженное на a_{21}:

$$\begin{array}{r}
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\
-a_{21}x_1 - a_{21}b_{12}x_2 - a_{21}b_{13}x_3 - a_{21}b_{14}x_4 = -a_{21}b_{15} \\
\hline
(a_{22} - a_{21}b_{12})x_2 + (a_{23} - a_{21}b_{13})x_3 + (a_{24} - a_{21}b_{14})x_4 = (a_{25} - a_{21}b_{15})
\end{array}.$$

Обозначим

$$a_{22} - a_{21}b_{12} = a_{22}^{(1)}; \quad a_{23} - a_{21}b_{13} = a_{23}^{(1)};$$
$$a_{24} - a_{21}b_{14} = a_{24}^{(1)}; \quad a_{25} - a_{21}b_{15} = a_{25}^{(1)}$$

и перепишем полученное уравнение в виде

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}.$$

2) Из третьего уравнения системы (1) вычтем уравнение (2), умноженное на a_{31}:

$$\begin{array}{r}
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\
-a_{31}x_1 - a_{31}b_{12}x_2 - a_{31}b_{13}x_3 - a_{31}b_{14}x_4 = -a_{31}b_{15} \\
\hline
(a_{32} - a_{31}b_{12})x_2 + (a_{33} - a_{31}b_{13})x_3 + (a_{34} - a_{31}b_{14})x_4 = a_{35} - a_{31}b_{15}
\end{array}.$$

Обозначив $a_{32} - a_{31}b_{12} = a_{32}^{(1)}$; $a_{33} - a_{31}b_{13} = a_{33}^{(1)}$ и т. д., перепишем полученное уравнение в виде

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}.$$

3) Из четвертого уравнения системы (1) вычтем уравнение (2), умноженное на a_{41}. Применив аналогичные обозначения, получим следующее уравнение:

$$a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}.$$

В результате проведенных элементарных преобразований имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными, эквивалентную системе (1):

$$\begin{cases}
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}, \\
a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}, \\
a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)},
\end{cases} \tag{1'}$$

где коэффициенты a_{ij} $(i, j \geqslant 2)$ вычисляются по формуле $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}$ (например, $a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{12}$).

Разделив, далее, коэффициенты первого уравнения системы (1′) на ведущий коэффициент $a_{22}^{(1)} \neq 0$, получим первое уравнение системы в виде

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 = \frac{a_{25}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Обозначим

$$\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = b_{23}^{(1)}; \quad \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = b_{24}^{(1)}; \quad \frac{a_{25}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = b_{25}^{(1)}$$

и вообще $\frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = b_{2j}^{(1)}$ $(j > 2)$. Тогда первое уравнение системы (1′) примет вид

$$x_2 + b_{23}^{(1)} x_3 + b_{24}^{(1)} x_4 = b_{25}^{(1)}, \tag{2′}$$

или

$$x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{23}^{(1)} x_3 - b_{24}^{(1)} x_4.$$

Исключая теперь x_2 из всех уравнений системы (1′), кроме первого, таким же способом, какими мы исключали x_1, придем к следующей системе из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 = a_{45}^{(2)}, \end{cases} \tag{1″}$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_{2j}^{(1)}$ $(i, j \geqslant 3)$. (Например, $a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - a_{32}^{(1)} b_{24}^{(1)}$.) Разделив коэффициенты первого уравнения системы (1″) на ведущий коэффициент $a_{33}^{(2)} \neq 0$, получим

$$x_3 + b_{34}^{(2)} x_4 = b_{35}^{(2)}, \tag{2″}$$

где $b_{3j}^{(2)} = \frac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$ $(j > 3)$, т. е.

$$x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} x_4.$$

Исключив теперь x_3 аналогичным путем из системы (1″), находим

$$a_{44}^{(3)} x_4 = a_{45}^{(3)}, \tag{1‴}$$

где $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)} b_{3j}^{(2)}$ $(i, j \geqslant 4)$. Отсюда

$$x_4 = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \tag{2‴}$$

Остальные неизвестные системы последовательно определяются из уравнений (2″), (2′) и (2):

$$x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} x_4,$$

$$x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)} x_4 - b_{23}^{(1)} x_3,$$

$$x_1 = b_{15} - b_{14} x_4 - b_{13} x_3 - b_{12} x_2.$$

x_1	x_2	x_3	x_4
$\boxed{a_{11}}$	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
$1=\frac{a_{11}}{a_{11}}$	$b_{12}=\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$b_{13}=\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$b_{14}=\frac{a_{14}}{a_{11}}$
	$\boxed{a_{22}^{(1)}}=a_{22}-a_{21}\,b_{12}$	$a_{23}^{(1)}=a_{23}-a_{21}\,b_{13}$	$a_{24}^{(1)}=a_{24}-a_{21}\,b_{14}$
	$a_{32}^{(1)}=a_{32}-a_{31}\,b_{12}$	$a_{33}^{(1)}=a_{33}-a_{31}\,b_{13}$	$a_{34}^{(1)}=a_{34}-a_{31}\,b_{14}$
	$a_{42}^{(1)}=a_{42}-a_{41}\,b_{12}$	$a_{43}^{(1)}=a_{43}-a_{41}\,b_{13}$	$a_{44}^{(1)}=a_{44}-a_{41}\,b_{14}$
	$1=\frac{a_{22}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{23}^{(1)}=\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{24}^{(1)}=\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$
		$\boxed{a_{33}^{(2)}}=a_{33}^{(1)}-a_{32}^{(1)}\,b_{23}^{(1)}$	$a_{34}^{(2)}=a_{34}^{(1)}-a_{32}^{(1)}\,b_{24}^{(1)}$
		$a_{43}^{(2)}=a_{43}^{(1)}-a_{42}^{(1)}\,b_{23}^{(1)}$	$a_{44}^{(2)}=a_{44}^{(1)}-a_{42}^{(1)}\,b_{24}^{(1)}$
		$1=\frac{a_{33}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$b_{34}^{(2)}=\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$
			$\boxed{a_{44}^{(3)}}=a_{44}^{(2)}-a_{43}^{(2)}\,b_{34}^{(2)}$
			$1=\frac{a_{44}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$
1	1	1	1

Таблица 2.1

Свободные члены	Σ	Разделы схемы	
a_1 a_{25} a_{35} a_{45}	$a_{16}=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}$ $a_{26}=a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25}$ $a_{36}=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}+a_{35}$ $a_{46}=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}+a_{45}$	I	Прямой ход
$b_{15}=\dfrac{a_{15}}{a_{11}}$	$b_{16}=\dfrac{a_{16}}{a_{11}}=1+b_{12}+b_{13}+b_{14}+b_{15}$		
$a_{25}^{(1)}=a_{25}-a_{21}\,b_{15}$ $a_{35}^{(1)}=a_{35}-a_{31}\,b_{15}$ $a_{45}^{(1)}=a_{45}-a_{41}\,b_{15}$	$a_{26}^{(1)}=a_{26}-a_{21}\,b_{16}=a_{22}^{(1)}+a_{23}^{(1)}+a_{24}^{(1)}+a_{25}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}=a_{36}-a_{31}\,b_{16}=a_{32}^{(1)}+a_{33}^{(1)}+a_{34}^{(1)}+a_{35}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}=a_{46}-a_{41}\,b_{16}=a_{42}^{(1)}+a_{43}^{(1)}+a_{44}^{(1)}+a_{45}^{(1)}$	II	
$b_{25}^{(1)}=\dfrac{a_{25}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{26}^{(1)}=\dfrac{a_{26}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}=1+b_{23}^{(1)}+b_{24}^{(1)}+b_{25}^{(1)}$		
$a_{35}^{(2)}=a_{35}^{(1)}-a_{32}^{(1)}\,b_{25}^{(1)}$ $a_{45}^{(2)}=a_{45}^{(1)}-a_{42}^{(1)}\,b_{25}^{(1)}$	$a_{36}^{(2)}=a_{36}^{(1)}-a_{32}^{(1)}\,b_{26}^{(1)}=a_{33}^{(2)}+a_{34}^{(2)}+a_{35}^{(2)}$ $a_{46}^{(2)}=a_{46}^{(1)}-a_{42}^{(1)}\,b_{26}^{(1)}=a_{43}^{(2)}+a_{44}^{(2)}+a_{45}^{(2)}$	III	
$b_{35}^{(2)}=\dfrac{a_{35}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$b_{36}^{(2)}=\dfrac{a_{36}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}=1+b_{34}^{(2)}+b_{35}^{(2)}$		
$a_{45}^{(3)}=a_{45}^{(2)}-a_{43}^{(2)}\,b_{35}^{(2)}$	$a_{46}^{(3)}=a_{46}^{(2)}-a_{43}^{(2)}\,b_{36}^{(2)}=a_{44}^{(3)}+a_{45}^{(3)}$	IV	
$b_{45}^{(3)}=\dfrac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$	$b_{46}^{(3)}=\dfrac{a_{46}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}=1+b_{45}^{(3)}$		
$x_4=b_{45}^{(3)}$ $x_3=b_{35}^{(2)}-b_{34}^{(2)}\,x_4$ $x_2=b_{25}^{(1)}-b_{24}^{(1)}\,x_4-b_{23}^{(1)}\,x_3$ $x_1=b_{15}-b_{14}\,x_4-$ $-b_{13}\,x_3-b_{12}\,x_2$	$\bar{x}_4=b_{46}^{(3)}=1+x_4$ $\bar{x}_3=b_{36}^{(2)}-b_{34}^{(2)}\bar{x}_4=1+x_3$ $\bar{x}_2=b_{26}^{(1)}-b_{24}^{(1)}\bar{x}_4-b_{23}^{(1)}\,\bar{x}_3=1+x_2$ $\bar{x}_1=b_{16}-b_{14}\,\bar{x}_4-b_{13}\,\bar{x}_3-b_{12}\,\bar{x}_2=1+x_1$	V	Обратный ход

Таким образом, процесс решения системы линейных уравнений по методу Гаусса сводится к построению эквивалентной системы уравнений (2), (2′), (2″) (2‴). Метод Гаусса применим при том условии, что все ведущие коэффициенты отличны от нуля.

Для удобства вычисления производятся по схеме, называемой *схемой единственного деления*. Вычисление элементов b_{ij} называется *прямым ходом*, вычисление значений неизвестных — *обратным ходом*, так как сначала определяется значение последнего неизвестного.

Схема единственного деления (схема Гаусса) составляется следующим образом.

В раздел I схемы (см. табл. 2.1) записываются коэффициенты при неизвестных (в столбцах соответствующих неизвестных), свободные члены и для каждой строки подсчитанные «контрольные суммы» (столбец Σ), равные сумме элементов a_{ij} в данной строке (здесь $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$); последняя строка раздела I, состоящая из 1 и элементов b_{ij}, получается делением первой строки раздела на ведущий коэффициент a_{11}.

Элементы раздела II схемы равны соответствующим элементам раздела I минус произведение $a_{i1}b_{1j}$ $(i, j \geqslant 2)$; например, $a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{13}$. Последняя строка раздела II, состоящая из 1 и элементов $b_{2j}^{(1)}$, получается делением первой строки раздела на ведущий коэффициент $a_{22}^{(1)}$.

Аналогично вычисляются элементы III и IV разделов схемы. I, II, III и IV разделы, заканчивающиеся вычислением элементов $b_{ij}^{(i-1)}$ $(i = 1, 2, 3, 4$; $j = 2, 3, 4, 5)$ составляют прямой ход вычислений схемы.

Обратный ход начинается с вычисления последнего неизвестного системы линейных уравнений x_4 и заканчивается вычислением первого неизвестного x_1. При обратном ходе используются лишь строки прямого хода, содержащие единицы и соответствующие элементы b_{ij} (назовем эти строки «отмеченными»).

Элемент $b_{45}^{(3)}$ последней «отмеченной» строки и столбца свободных членов дает значение x_4. Далее, остальные неизвестные x_3, x_2 и x_1 находятся вычитанием из свободного члена «отмеченной» строки суммы произведений ее коэффициентов на соответствующие значения ранее найденных неизвестных; например, $x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4$.

Значения неизвестных последовательно выписываются в V раздел. Расставленные там единицы помогают находить для x_j соответствующие коэффициенты в «отмеченных» строках.

Для контроля вычислений используются так называемые контрольные суммы:

$$a_{i6} = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \text{ и } b_{i6} = \sum_{j=1}^{5} b_{ij} + 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

помещенные в столбце Σ.

Над контрольными суммами в каждой строке проделываются те же операции, что и над остальными элементами этой строки. При отсутствии ошибок в вычислениях элементы столбца Σ равны суммам элементов соответствующих преобразованных строк. Таким образом, контролируется прямой ход схемы.

Для контроля обратного хода $\bar{x}_4$ находится в последней «отмеченной» строке столбца Σ, т. е. $\bar{x}_4 = b_{46}^{(3)}$, а остальные неизвестные этого столбца $\bar{x}_j$ ($j = 3, 2, 1$) подсчитываются в тех же строках и по тем же формулам, что и неизвестные x_j, только в формулы подставляются соответствующие $\bar{x}_j$. В итоге числа $\bar{x}_j$ должны совпадать с числами $x_j + 1$.

Пример 1. По схеме единственного деления решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Решение. В раздел I табл. 2.2 вписываем матрицу системы, ее свободные члены и контрольные суммы. Затем подсчитываем «отмеченную» строку этого раздела, разделив первую строку на $a_{11} = 2$. Например, $b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{2}{2} = 1$.

Таблица 22

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Σ	Разделы схемы
$\boxed{2}$	2	−1	1	4	8	
4	3	−1	2	6	14	I
8	5	−3	4	12	26	
3	3	−2	2	6	12	
1	1	−0,5	0,5	2	4	
	$\boxed{-1}$	1	0	−2	−2	
	−3	1	0	−4	−6	II
	0	−0,5	0,5	0	0	
	1	−1	0	2	2	
		$\boxed{-2}$	0	2	0	
		−0,5	0,5	0	0	III
		1	0	−1	0	
			$\boxed{0,5}$	−0,5	0	IV
			1	−1	0	
			1	$x_4 = -1$	$\bar{x}_4 = 0$	
		1		$x_3 = -1$	$\bar{x}_3 = 0$	V
	1			$x_2 = 1$	$\bar{x}_2 = 2$	
1				$x_1 = 1$	$\bar{x}_1 = 2$	

Элементы раздела II вычисляем по следующему правилу: каждый элемент этого раздела равен соответствующему элементу раздела I минус произведение первого элемента его строки на элемент «отмеченной» строки в его столбце. Полученный результат записываем на соответствующее место в разделе II. Например,

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}\, b_{13} = -1 - 4(-0,5) = 1,$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33} - a_{31}\, b_{13} = -3 - 8(-0,5) = 1.$$

Элементы «отмеченной» строки раздела II получим, разделив его первую строку на ведущий коэффициент $a_{22}^{(1)} = -1$. Например, $b_{23}^{(1)} = \dfrac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

Аналогично вычисляются элементы III и IV разделов. Например:

$$a_{44}^{(2)} = a_{44}^{(1)} - a_{42}^{(1)}\, b_{24}^{(1)} = 2 - 3 \cdot 0,5 = 0,5,$$

$$a_{45}^{(3)} = a_{45}^{(2)} - a_{43}^{(2)}\, b_{35}^{(2)} = 0 - (-0,5)(-1) = -0,5.$$

Для вычисления элементов раздела V, т. е. для нахождения неизвестных, используем «отмеченные» строки, начиная с последней.

Неизвестное x_4 представляет собой свободный член последней «отмеченной» строки: $x_4 = b_{45}^{(3)} = 1$, а остальные неизвестные x_3, x_2 и x_1 получаются последовательно в результате вычитания из свободных членов «отмеченных» строк суммы произведений соответствующих коэффициентов $b_{ij}^{(i-1)}$ на ранее найденные значения неизвестных.

Контроль осуществляется с помощью столбца Σ, над которым производятся те же действия, что и над остальными столбцами (см табл. 2.1 и 2.2), и в итоге сумма элементов каждой строки схемы (кроме столбца Σ) должна быть равна элементу этой строки из столбца Σ. Корни $\bar{x}_j$, принадлежащие столбцу Σ, должны быть равны $1 + x_j$ для каждой строки раздела V.

В результате получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$.

Пример 2. По схеме единственного деления решить следующую систему линейных уравнений с точностью до 0,0001:

$$\begin{cases} 0,63\,x_1 + 1,00\,x_2 + 0,71\,x_3 + 0,34\,x_4 = 2,08, \\ 1,17\,x_1 + 0,18\,x_2 - 0,65\,x_3 + 0,71\,x_4 = 0,17, \\ 2,71\,x_1 - 0,75\,x_2 + 1,17\,x_3 - 2,35\,x_4 = 1,28, \\ 3,58\,x_1 + 0,21\,x_2 - 3,45\,x_3 - 1,18\,x_4 = 0,05. \end{cases}$$

Решение системы приведено в табл. 2.3. Окончательный ответ: $x_1 = 0,4026$, $x_2 = 1,5016$, $x_3 = 0,5862$, $x_4 = -0,2678$

Если приближенные значения корней, полученные по схеме Гаусса, достаточно точны, т. е. поправки корней малы по абсолютной величине, то корни можно не уточнять.

В случае же необходимости уточнения приближенных значений корней поступают следующим образом:

1) вычисляют для каждого уравнения системы *невязки* — разности между правой и левой частями системы, получающиеся после подстановки в уравнения приближенных значений корней; если обозначить приближенные значения корней через $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$, невязки — через ε_1, ε_2, ..., ε_n и свободные члены — через b_1, b_2, ..., b_n, то

Таблица 2.3

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Σ
$\boxed{0,63}$	1,00	0,71	0,34	2,08	4,76
1,17	0,18	—0,65	0,71	0,17	1,58
2,71	—0,75	1,17	—2,35	1,28	2,06
3,58	0,21	—3,45	—1,18	0,05	—0,79
1	1,587	1,127	0,539	3,302	7,555
	$\boxed{-1,6768}$	—1,9686	0,0794	—3,6933	—7,2593
	—5,0508	—1,8842	—3,8107	—7,6684	—18,4141
	—5,4715	—7,4847	—3,1096	—11,7712	—27,8370
	1	1,17402	—0,04735	2,20259	4,32926
		$\boxed{4,04554}$	—4,04986	3,45644	3,45212
		—1,06105	—3,36868	0,28027	—4,14946
		1	—1,00106	0,85438	0,85332
			$\boxed{-4,43085}$	1,18681	—3,24404
			1	—0,26785	0,73215
			1	$x_4 = -0,26785$	$\bar{x}_4 = 0,73215$
		1		$x_3 = 0,58625$	$\bar{x}_3 = 1,58625$
	1			$x_2 = 1,50164$	$\bar{x}_2 = 2,50164$
1				$x_1 = 0,40257$	$\bar{x}_1 = 1,40257$

$$\varepsilon_1 = b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j},$$

$$\varepsilon_2 = b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_n = b_n - \sum_{j=1}^{n} a_{nj};$$

2) выписывают невязки ε_i в отдельный столбец схемы Гаусса и производят над ними те же операции, что и над другими столбцами схемы;

3) считая столбец ε столбцом свободных членов, вычисляют ε_1, ε_2, ..., ε_n как значения неизвестных;

4) находят уточненные значения неизвестных, прибавляя к приближенным значениям неизвестных $x_i^{(0)}$ соответствующие невязки ε_i:

$$x_1 = x_1^{(0)} + \varepsilon_1, \quad x_2 = x_2^{(0)} + \varepsilon_2 \ \dots, \ x_n = x_n^{(0)} + \varepsilon_n.$$

Пример 3. Решить методом Гаусса с тремя десятичными знаками систему

$$\begin{cases} 7{,}09\,x_1+1{,}17\,x_2-2{,}23\,x_3=-4{,}75, \\ 0{,}43\,x_1+\ 1{,}4\ \ x_2-0{,}62\,x_3=-1{,}05, \\ 3{,}21\,x_1-4{,}25\,x_2+2{,}13\,x_3=-5{,}06 \end{cases}$$

и уточнить полученные приближенные значения корней до 10^{-4}.

Решение. По схеме Гаусса вычисляем $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ и $x_3^{(0)}$ с тремя значащими цифрами (табл. 2.4).

Таблица 2.4

x_1	x_2	x_3	Свободные члены	Σ	ε
$\boxed{7{,}09}$	1,17	—2,23	—4,75	1,28	0,00097
0,43	1,4	—0,62	—1,05	0,16	0,00087
3,21	—4,25	2,13	5,06	6,15	—0,00295
1	0,1650	—0,3145	—0,6700	0,1805	0,00014
	$\boxed{1{,}3290}$	—0,4847	—0,7619	0,0824	0,00081
	—4,7796	3,1395	7,2107	5,5706	—0,00340
	1	—0,3647	—0,5733	0,0620	0,00061
		$\boxed{1{,}3964}$	4,4705	5,8669	—0,00048
		1	3,2015	4,2015	—0,00035
		1	3,2015	4,2015	—0,00035
	1		0,5943	1,5943	0,00048
1			0,2388	1,2388	—0,0005

Таким образом, $x_1^{(0)}=0{,}239$, $x_2^{(0)}=0{,}594$, $x_3^{(0)}=3{,}202$.

Чтобы найти невязку $\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{bmatrix}$, необходимо решить данную систему с той же матрицей

$$A=\begin{bmatrix}7{,}09 & 1{,}17 & -2{,}23\\ 0{,}43 & 1{,}4 & -0{,}62\\ 3{,}21 & -4{,}25 & 2{,}13\end{bmatrix}$$

и новым свободным членом ε, который подсчитываем следующим образом.

1. Вычисляем значения свободных членов, для чего подставляем в уравнения данной системы значения $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$:

$$7{,}09\cdot0{,}239+1{,}17\cdot0{,}594-2{,}23\cdot3{,}202=-4{,}75097;$$
$$0{,}43\cdot0{,}239+1{,}4\cdot0{,}594-0{,}62\cdot3{,}202=-1{,}05087;$$
$$3{,}21\cdot0{,}239-4{,}25\cdot0{,}594-2{,}13\cdot3{,}202=\ 5{,}06295.$$

Невязки соответственно равны $\varepsilon_1=-4{,}75+4{,}75097=0{,}00097$; $\varepsilon_2=-1{,}05+1{,}05087=0{,}00087$; $\varepsilon_3=5{,}06-5{,}06295=-0{,}00295$.

Решаем данную систему со свободными членами $\varepsilon_1=0{,}00097$; $\varepsilon_2=0{,}00087$ и $\varepsilon_3=-0{,}00295$. Соответственно с точностью до 10^{-4} получаются значения

$\varepsilon_1 = -0{,}0004$; $\varepsilon_2 = 0{,}0005$; $\varepsilon_3 = -0{,}0001$. Теперь находим уточненные неизвестные:

$$x_1 = x_1^{(0)} + \varepsilon_1 = 0{,}239 - 0{,}0004 = 0{,}2386,$$
$$x_2 = x_2^{(0)} + \varepsilon_2 = 0{,}594 + 0{,}0005 = 0{,}5945;$$
$$x_3 = x_3^{(0)} + \varepsilon_3 = 3{,}202 - 0{,}0001 = 3{,}2019.$$

§ 2.12. Вычисление определителей с помощью схемы Гаусса

Метод Гаусса может быть использован при вычислении определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}^{(1)}\, a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)},$$

где a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, ... $a_{nn}^{(n-1)}$ — ведущие элементы схемы единственного деления.

Пример 1. По схеме единственного деления вычислить определитель

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение приведено в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Столбцы 1	2	3	4	Σ
$\boxed{1}$	1	2	3	7
3	−1	−1	−2	−1
2	3	−1	−1	3
1	2	3	−1	5
1	1	2	3	7
	$\boxed{-4}$	−7	−11	−22
	1	−5	−7	−11
	1	1	−4	−2
	1	7/4	11/4	22/4
		$\boxed{-27/4}$	−39/4	−66/4
		−3/4	−27/4	−30/4
		1	13/9	22/9
			$\boxed{-17/3}$	−17/3

Таким образом, $d = 1 \cdot (-4)\left(-\frac{27}{4}\right) \cdot \left(-\frac{17}{3}\right) = -153.$

Пример 2. По схеме единственного деления с точностью до 0,001 вычислить определитель

$$d = \begin{vmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{vmatrix}.$$

Решение приведено в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Столбцы				Σ
1	2	3	4	
$\boxed{1}$	0,42	0,54	0,66	2,62
0,42	1,00	0,32	0,44	2,18
0,54	0,32	1,00	0,22	2,08
0,66	0,44	0,22	1,00	2,32
1	0,42	0,54	0,66	2,62
	$\boxed{0,8236}$	0,0932	0,1628	1,0796
	0,0932	0,7084	0,1364	0,6652
	0,1628	—0,1364	0,5644	0,5908
	1	0,1135	0,1973	1,3108
		$\boxed{0,6978}$	—0,1548	0,5430
		—0,1549	0,5323	0,3774
		1	—0,2219	0,7781
			$\boxed{0,4979}$	0,4979

Окончательно имеем $d = 1 \cdot 0,8236 \cdot 0,6978 \cdot 0,4979 = 0,2861.$

§ 2.13 Обращение матрицы с помощью схемы Гаусса

Пусть дана неособенная матрица $A = [a_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Для нахождения обратной матрицы $A^{-1} = [x_{ij}]$ используется основное соотношение $A \cdot A^{-1} = E$, где E — единичная матрица.

Так, для матрицы четвертого порядка, умножив

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

получим 4 системы уравнений относительно 16 неизвестных x_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$).

В общем случае имеют место соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2 \ldots n),$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{когда } i = j, \\ 0, & \text{когда } i \neq j; \end{cases}$$

δ_{ij} называется *символом Кронекера.*

Полученные n систем линейных уравнений для $j = 1, 2, \ldots, n$ имеют одну и ту же матрицу A и различные свободные члены, составляющие единичную матрицу. Поэтому эти системы можно решать по схеме Гаусса.

Решения x_{ij}, найденные по схеме единственного деления, и будут элементами обратной матрицы A^{-1}.

Таблица 27

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ
$\boxed{1}$	0	1	2	1	0	0	0	5
−1	2	3	1	0	1	0	0	6
4	0	−2	1	0	0	1	0	4
0	2	1	2	0	0	0	1	6
1	0	1	2	1	0	0	0	5
	$\boxed{2}$	4	3	1	1	0	0	11
	0	−6	−7	−4	0	1	0	−16
	2	1	2	0	0	0	1	6
	1	2	3/2	1/2	1/2	0	0	11/2
		$\boxed{-6}$	−7	−4	0	1	0	−16
		3	−7	−1	−1	0	1	− 5
		1	7/6	4/6	0	−1/6	0	16/6
			$\boxed{5/2}$	1	−1	−1/2	1	3
			1	2/5	−2/5	−1/5	2/5	6/5
			1	2/5	−2/5	−1/5	2/5	6/5
		1		1/5	7/15	1/15	−7/15	19/15
	1			−1/2	1/6	1/6	1/3	7/6
1				0	1/3	1/3	−1/3	4/3

Таблица 2.8

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ
$\boxed{1{,}00}$	0,47	—0,11	0,55	1	0	0	0	2,91
0,42	1,00	0,35	0,17	0	1	0	0	2,94
—0,25	0,67	1,00	0,36	0	0	1	0	2,78
0,54	—0,32	—0,74	1,00	0	0	0	1	1,48
1	0,47	—0,11	0,55	1	0	0	0	2,91
	$\boxed{0{,}8026}$	0,3962	—0,0610	—0,4200	1	0	0	1,7178
	0,7875	0,9725	0,4975	0,2500	0	1	0	3,5075
	—0,5738	—0,6806	0,7030	—0,5400	0	0	1	—0,0914
	1	0,4936	—0,0760	—0,5233	1,2460	0	0	2,1403
		$\boxed{0{,}5838}$	0,5573	0,6621	—0,9812	1	0	1,8220
		—0,3974	0,6594	—0,8403	0,7150	0	1	1,1367
		1	0,9546	1,1341	—1,6807	1,7129	0	3,1209
			$\boxed{1{,}0388}$	—0,3896	0,0471	0,6807	1	2,3770
			1	—0,3750	0,0453	0,6553	0,9626	2,2882
			1	$x_{41}=-0{,}3750$	$x_{42}=0{,}0453$	$x_{43}=0{,}6553$	$x_{44}=0{,}9626$	2,2882
		1		$x_{31}=1{,}4921$	$x_{32}=-1{,}7239$	$x_{33}=1{,}0873$	$x_{34}=-0{,}9189$	0,9366
	1			$x_{21}=-1{,}2883$	$x_{22}=2{,}1003$	$x_{23}=-0{,}4869$	$x_{24}=0{,}5268$	1,8519
1				$x_{11}=1{,}9759$	$x_{12}=-1{,}2017$	$x_{13}=-0{,}0120$	$x_{14}=-0{,}8781$	0,8841

Следовательно,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1{,}9759 & -1{,}2017 & -0{,}0120 & -0{,}8781 \\ -1{,}2883 & 2{,}1003 & -0{,}4869 & 0{,}5268 \\ 1{,}4921 & -1{,}7239 & 1{,}0873 & -0{,}9189 \\ -0{,}3750 & 0{,}0453 & 0{,}6553 & 0{,}9626 \end{bmatrix}.$$

Пример 1. Обратить по схеме Гаусса матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение приведено в табл. 2.7 на стр. 87.
Таким образом,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/5 & 7/15 & 1/15 & -7/15 \\ 2/5 & -2/5 & -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Обратить матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 1,00 & 0,47 & -0,11 & 0,55 \\ 0,42 & 1,00 & 0,35 & 0,17 \\ -0,25 & 0,67 & 1,00 & 0,36 \\ 0,54 & -0,32 & -0,74 & 1,00 \end{bmatrix}$$

по схеме Гаусса; все расчеты вести с четырьмя десятичными знаками Ответ округлить до трех десятичных знаков.

Решение приведено в табл. 2.8 на стр. 88.

§ 2.14. Понятие предела для векторов и матриц

Понятие предела для векторов и матриц необходимо для описания приближенных (итерационных) методов решения систем линейных уравнений.

Пусть дана последовательность векторов:

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix},\quad X^{(2)}=\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix},\quad \ldots,\quad X^{(k)}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

с координатами $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots, x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$. Если у каждой координаты существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$, т. е.

$$x_1^{(1)}\to x_1,\ x_2^{(1)}\to x_2,\ \ldots,\ x_n^{(1)}\to x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1^{(k)}\to x_1,\ x_2^{(k)}\to x_2,\ \ldots,\ x_n^{(k)}\to x_n,$$

то вектор $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ называется *пределом последовательности век-*

торов $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$, а сама последовательность называется *сходящейся* к вектору X, т е.

$$X^{(k)} \to X, \text{ или } \lim_{k \to \infty} X^{(k)} = X.$$

Аналогично, если имеется последовательность квадратных матриц

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(2)} & a_{n2}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \ldots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \ldots & a_{2n}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(k)} & a_{n2}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

с элементами $a_{ij}^{(1)}, \ldots, a_{ij}^{(k)}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$, то *пределом последовательности матриц* $A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}$ называется матрица с элементами $a_{ij} = \lim_{k \to \infty} a_{ij}^{(k)}$, т. е.

$$a_{11}^{(1)} \to a_{11}; \ \ldots; \ a_{11}^{(k)} \to a_{11}; \ \ldots; \ a_{nn}^{(1)} \to a_{nn}, \ \ldots, \ a_{nn}^{(k)} \to a_{nn},$$

при условии, что все эти пределы существуют. Сама же последовательность $A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}$ называется *сходящейся* к A, т. е.

$$A^{(k)} \to A, \text{ или } \lim_{k \to \infty} A^{(k)} = A.$$

Если $A^{(k)} \to A$, то $A^{(k)}X \to AX$ при любом векторе X и $(A^{(k)})^{-1} \to A^{-1}$.

Из сказанного выше вытекает следующее утверждение (приводим его без доказательства): *если последовательность матриц* $A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}$ *имеет пределом неособенную матрицу* A *и векторы* $B^{(1)}, \ldots, B^{(k)}$ *сходятся к* B, *то решения систем* $A^{(1)}X = B^{(1)}, \ldots, A^{(k)}X = B^{(k)}$ *имеют предел, являющийся решением системы* $AX = B$, т. е.

$$X^{(k)} = (A^{(k)})^{-1} B^{(k)} \to A^{-1} B.$$

§ 2.15. Приближенные методы решения систем линейных уравнений

Приближенные методы решения систем линейных уравнений позволяют получать значения корней системы с заданной точностью в виде предела последовательности некоторых векторов. Процесс построения такой последовательности называется *итерационным* (повторяющимся).

Эффективность применения приближенных методов зависит от удачного выбора начального вектора и быстроты сходимости процесса.

Рассмотрим два приближенных метода: метод последовательных приближений (метод итерации) и метод Зейделя.

Метод последовательных приближений (метод итерации). Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Запишем систему (1) в матричном виде:

$$AX = B, \tag{2}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Предполагая, что диагональные элементы $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), выразим x_1 через первое уравнение системы, x_2 — через второе уравнение и т. д. В результате получим систему, эквивалентную системе (1):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{1n}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{2n}}{a_{nn}}x_2 - \dots - \dfrac{a_{n-1,\,n}}{a_{nn}}x_{n-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим $\dfrac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i$; $-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij}$, где $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда система (3) запишется таким образом:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n\ n-1}x_{n-1}. \end{cases} \tag{3'}$$

Система (3′) называется системой, приведенной к *нормальному виду*. Введя обозначения

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots \alpha_{2n} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \dots \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

запишем систему (3′) в матричной форме:

$$X = \beta + \alpha X,$$

или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Решим систему (4) методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем столбец свободных членов:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{— \textit{нулевое приближение},}$$

далее, построим матрицы-столбцы

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \text{— \textit{первое приближение};}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \text{— \textit{второе приближение}}$$

и т. д.

Вообще, любое $(k+1)$-е приближение вычисляют по формуле

$$X^{(k+1)} = \beta + \alpha X^{(k)} \quad (k = 0,\ 1,\ \dots,\ n). \qquad (5)$$

Если последовательность приближений $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ имеет предел $X = \lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)}$, то этот предел является решением системы (3), поскольку по свойству предела $\lim\limits_{x\to\infty} X^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)}$, т. е. $X = \alpha + \beta X$.

Пример 1. Методом последовательных приближений решить систему

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение. 1) Приведем данную систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125\,x_2 - 0,125\,x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2\,x_1 + 0,2\,x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2\,x_1 + 0,2\,x_2; \end{cases} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}.$$

2) Строим последовательные приближения. Нулевое приближение:

$$X^{(0)}=\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}.$$

Первое приближение:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{bmatrix}.$$

Второе приближение:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{bmatrix}.$$

Третье приближение:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2,9935 \\ 1,0068 \\ 1,0068 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $x_1=2,9935$; $x_2=1,0068$; $x_3=1,0068$ и с точностью до 10^{-1} получаем $x_1=3$; $x_2=1$; $x_3=1$.

Пример 2. Методом итерации решить следующую систему с точностью до 10^{-3}:

$$\begin{cases} 7,6x_1+0,5x_2+2,4x_3=1,9, \\ 2,2x_1+9,1x_2+4,4x_3=9,7, \\ -1,3x_1+0,2x_2+5,8x_3=-1,4. \end{cases} \qquad (*)$$

Решение. 1) Приведем данную систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1,9}{7,6}-\dfrac{0,5}{7,6}x_2-\dfrac{2,4}{7,6}x_3, \\ x_2=\dfrac{9,7}{9,1}-\dfrac{2,2}{9,1}x_1-\dfrac{4,4}{9,1}x_3, \\ x_3=\dfrac{-1,4}{5,8}+\dfrac{1,3}{5,8}x_1-\dfrac{0,2}{5,8}x_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1=0,25-0,065x_2-0,3158x_3, \\ x_2=1,0659-0,2418x_1-0,4847x_2, \\ x_3=-0,2414+0,2241x_1-0,3448x_2; \end{cases}$$

$$\alpha=\begin{bmatrix} 0 & -0,065 & -0,3158 \\ -0,2418 & 0 & -0,4847 \\ 0,2241 & -0,3448 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \beta=\begin{bmatrix} 0,25 \\ -1,0659 \\ -0,2414 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что линейную систему можно привести к нормальному виду также следующим образом: записать коэффициенты при x_1, x_2, x_3 в соответствующих уравнениях системы (*) в виде kx, где k — число, близкое к коэффициенту при соответствующем неизвестном и на которое легко разделить коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

Например.

$$10x_1=7,6x_1+2,4x_1 \text{ (в первом уравнении)},$$
$$10x_2=9,1x_2+0,9x_2 \text{ (во втором уравнении)},$$
$$10x_3=5,8x_3+4,2x_3 \text{ (в третьем уравнении)}.$$

Перепишем систему (*) таким образом:

$$\begin{cases} 10x_1=1,9+2,4x_1-0,5x_2-2,4x_3, \\ 10x_2=9,7-2,2x_1+0,9x_2-4,4x_3, \\ 10x_3=-1,4+1,3x_1-0,2x_2+4,2x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=0,19+0,24x_1-0,05x_2-0,24x_3, \\ x_2=0,97-0,22x_1+0,09x_2-0,44x_3, \\ x_3=-0,14+0,13x_1-0,02x_2+0,42x_3. \end{cases}$$

Матрица α и вектор β принимают вид

$$\alpha=\begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix}, \quad \beta=\begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix}.$$

2) Последовательно находим

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,2207 \\ 1,0771 \\ -0,1935 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0,2207 \\ 1,0771 \\ -0,1935 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,2359 \\ 1,1034 \\ -0,2141 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, с точностью до 10^{-3} получаем

$$x_1=0,236; \quad x_2=1,103; \quad x_3=-0,214.$$

§ 2.16. Условия сходимости итерационного процесса

Пусть дана приведенная к нормальному виду система линейных уравнений $X=\beta+\alpha X$. Итерационный процесс и его сходимость зависят от величины элементов матрицы α следующим образом: *если сумма модулей элементов строк или сумма модулей элементов столбцов меньше единицы, то процесс итерации для данной системы сходится к единственному решению независимо от выбора начального вектора.*

Следовательно, условие сходимости можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|<1 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots\ n) \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n}|\alpha_{ij}|<1 \quad (j=1,2,\ \ldots,\ n).$$

Пример. Для системы

$$\begin{cases} 8x_1+\ x_2+\ x_3=26, \\ x_1+5x_2-\ x_3=\ 7, \\ x_1-\ x_2+5x_3=\ 7, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1=3,25-0,125x_2-0,125x_3, \\ x_2=1,4\ -0,2x_1\ +0,2x_3, \\ x_3=1,4\ -0,2x_1\ +0,2x_2 \end{cases}$$

итерационный процесс сходится, так как

$$\alpha=\begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\alpha_{11}| + |\alpha_{21}| + |\alpha_{31}| = 0,2 + 0,2 = 0,4 < 1;$$
$$|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| + |\alpha_{32}| = 0,125 + 0,2 = 0,325 < 1;$$
$$|\alpha_{13}| + |\alpha_{23}| + |\alpha_{33}| = 0,125 + 0,2 = 0,325 < 1.$$

Аналогично можно было бы проверить выполнение условия сходимости, взяв суммы модулей элементов строк.

Процесс итерации заведомо сходится, если элементы матрицы α удовлетворяют неравенству $|\alpha_{ij}| < 1/n$, где n — число неизвестных данной системы. В нашем примере $n = 3$ и все элементы $|\alpha_{ij}| < 1/3$.

Сходимость итерационного процесса связана с нормами матрицы α следующими соотношениями. *Если выполняется одно из условий:*

$$\|\alpha\|_1 = \max_{i} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$

либо

$$\|\alpha\|_2 = \max_{j} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$

либо

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1,$$

то процесс итерации линейной системы сходится к единственному решению

Так, в рассмотренном выше примере норма

$$\|\alpha\|_2 = \max\ (0,4;\ 0,325;\ 0,325) = 0,4 < 1,$$

т. е. итерационный процесс сходится.

§ 2.17. Оценка погрешности приближенного процесса метода итерации

Если задана допустимая погрешность вычислений ε и X_i — вектор точных значений неизвестных линейной системы, а $X_i^{(k)}$ есть k-е приближение значений неизвестных, вычисленное методом итерации, то для *оценки погрешности* $\| X_i - X_i^{(k)} \| \leqslant \varepsilon$ метода применяется формула

$$\|X_i - X_i^{(k)}\| \leqslant \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\|, \qquad (1)$$

где $\|\alpha\|$ — одна из трех норм матрицы α, $\|\beta\|$ — та же норма вектора β, а k — число итераций, необходимое для достижения заданной точности. При этом предполагается, что последовательные приближения $X_i^{(j)}$ (где $j = 0, 1, \ldots, k$, $i = 1, 2, \ldots, n$) вычисляются точно, в них отсутствуют погрешности округления.

Пример. Показать, что для системы

$$\begin{cases} 9{,}9x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}6x_3 = 0, \\ 0{,}4x_1 + 13{,}6x_2 - 4{,}2x_3 = 8{,}2, \\ 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + 7{,}1x_3 = -1{,}3 \end{cases}$$

итерационный процесс сходится, и определить, сколько итераций следует выполнить, чтобы найти корни системы с точностью до 10^{-4}.

Решение. 1) Приводим систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} 10x_1 = 0{,}1x_1 + 1{,}5x_2 - 2{,}6x_3, \\ 20x_2 = -0{,}4x_1 + 6{,}4x_2 + 4{,}2x_3 + 8{,}2, \\ 10x_3 = -0{,}7x_1 - 0{,}4x_2 + 2{,}9x_3 - 1{,}3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}01x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}26x_3, \\ x_2 = -0{,}02x_1 + 0{,}32x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}41, \\ x_3 = -0{,}07x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}29x_3 - 0{,}13. \end{cases}$$

2) Матрица системы

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}15 & -0{,}26 \\ -0{,}02 & 0{,}32 & 0{,}21 \\ -0{,}07 & -0{,}04 & 0{,}29 \end{bmatrix}.$$

Используя норму $\|\alpha\|_2$, получим $\|\alpha\|_2 = \max(0{,}1;\ 0{,}51;\ 0{,}76) = 0{,}76 < 1$. Следовательно, итерационный процесс для данной системы сходится.

3) Имеем $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}41 \\ -0{,}13 \end{bmatrix}$, $\quad \|\beta\|_2 = 0 + 0{,}41 + 0{,}13 = 0{,}54.$

4) Применяя формулу (1), находим

$$\|X - X^{(k)}\| \leqslant \frac{\|\alpha\|_2^{k+1} \cdot \|\beta\|_2}{1 - \|\alpha\|_2} = \frac{0{,}76^{k+1} \cdot 0{,}54}{0{,}46} \leqslant 10^{-4};$$

$$0{,}76^{k+1} \cdot 0{,}54 \leqslant 10^{-4} \cdot 0{,}46; \quad 0{,}76^{k+1} \leqslant \frac{10^{-4} \cdot 46}{54};$$

$$(k+1)\lg 0{,}76 \leqslant \lg 46 - \lg 54 - 4;$$

$$-(k+1) \cdot 0{,}1192 \leqslant 1{,}6628 - 1{,}7324 - 2 = -4{,}0696;$$

$$k + 1 > \frac{4{,}0696}{0{,}1192} = 32{,}9; \quad k > 32{,}9; \quad k = 33.$$

Теоретическая оценка числа итераций, необходимых для обеспечения заданной точности, практически оказывается завышенной.

§ 2.18. Метод Зейделя. Условия сходимости процесса Зейделя

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода последовательных приближений. В методе Зейделя при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестного x_i учитываются уже найденные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

Пусть дана линейная система

$$\begin{cases} x_1=\beta_1+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n, \\ x_2=\beta_2+\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n, \\ x_3=\beta_3+\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\ldots+\alpha_{3n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=\beta_n+\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{nn}x_n. \end{cases} \tag{1}$$

Выбираем произвольно начальные приближения корней $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$ и подставляем в первое уравнение системы (1):

$$x_1^{(1)}=\beta_1+\alpha_{11}x_1^{(0)}+\alpha_{12}x_2^{(0)}+\ldots+\alpha_{1n}x_n^{(0)};$$

полученное первое приближение $x_1^{(1)}$ подставляем во второе уравнение системы (1):

$$x_2^{(1)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(1)}+\alpha_{22}x_2^{(0)}+\ldots+\alpha_{2n}x_n^{(0)};$$

полученные первые приближения $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ подставляем в третье уравнение системы (1):

$$x_3^{(1)}=\beta_3+\alpha_{31}x_1^{(1)}+\alpha_{32}x_2^{(1)}+\ldots+\alpha_{3n}x_a^{(0)}$$

и т. д. Наконец,

$$x_n^{(1)}=\beta_n+\alpha_{n1}x_1^{(1)}+\alpha_{n2}x_2^{(1)}+\ldots+\alpha_{n,\,n-1}x_{n-1}^{(1)}+\alpha_{nn}x_n^{(0)}.$$

Аналогично строим вторые, третьи и т. д. итерации.

Таким образом, предполагая, что k-е приближения корней $x_i^{(k)}$ известны, по методу Зейделя строим $(k+1)$-е приближения по следующим формулам:

$$\begin{gathered} x_1^{(k+1)}=\beta_1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(k+1)}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{2j}x_j^{(k)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)}=\beta_n+\sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}x_j^{(k+1)}+\alpha_{nn}x_a^{(k)}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

Пример 1. Методом Зейделя решить систему

$$\begin{cases} 7,6x_1+0,5x_2+2,4x_3=1,9, \\ 2,2x_1+9,1x_2+4,4x_3=9,7, \\ -1,3x_1+0,2x_2+5,8x_3=-1,4. \end{cases}$$

Решение. 1) Приведем систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} 10x_1 = 1,9 + 2,4x_1 - 0,5x_2 - 2,4x_3, \\ 10x_2 = 9,7 - 2,2x_1 + 0,9x_2 - 4,4x_3, \\ 10x_3 = -1,4 + 1,3x_1 - 0,2x_2 + 4,2x_3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = 0,19 + 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3, \\ x_2 = 0,97 - 0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3, \\ x_3 = -0,14 + 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3. \end{cases}$$

2) За нулевые приближения возьмем соответствующие значения свободных членов: $x_1^{(0)} = 0,19$; $x_2^{(0)} = 0,97$; $x_3^{(0)} = -0,14$.

3) Строим итерации по методу Зейделя. Первые приближения:

$$x_1^{(1)} = 0,19 + 0,24 \cdot 0,19 - 0,05 \cdot 0,97 - 0,24 \cdot (-0,14) = 0,2207,$$

$$x_2^{(1)} = 0,97 - 0,22 \cdot 0,2207 + 0,09 \cdot 0,97 - 0,44 \cdot (-0,14) = 1,0703,$$

$$x_3^{(1)} = -0,14 + 0,13 \cdot 0,2207 - 0,02 \cdot 1,0703 + 0,42 \cdot (-0,14) = -0,1915.$$

Вторые приближения:

$$x_1^{(2)} = 0,19 + 0,24 \cdot 0,2207 - 0,05 \cdot 1,0703 - 0,24 \cdot (-0,1915) = 0,2354,$$

$$x_2^{(2)} = 0,97 - 0,22 \cdot 0,2354 + 0,09 \cdot 1,0703 - 0,44 \cdot (-0,1915) = 1,0988,$$

$$x_3^{(2)} = -0,14 + 0,13\ 0,2354 - 0,02 \cdot 1,0988 + 0,42 \cdot (-0,1915) = -0,2118$$

и т. д.

Решение этого примера приведено в табл. 2.11.

Таблица 2 11

№ итерации	x_1	x_2	x_3
0	0,19	0,97	−0,14
1	0,2207	1,0703	−0,1915
2	0,2354	1,0988	−0,2118
3	0,2424	1,1088	−0,2196
4	0,2454	1,1124	−0,2226
5	0,2467	1,1138	−0,2237
6	0,2472	1,1143	−0,2241
7	0,2474	1,1145	−0,2243
8	0,2475	1,1145	−0,2243

Построение итераций заканчивается, когда с заданной степенью точности получаем одинаковые значения в двух итерациях подряд. В нашем примере это итерации 7 и 8.

Окончательный ответ: $x_1 \approx 0,248$; $x_2 \approx 1,114$; $x_3 \approx -0,224$.

Процесс Зейделя для линейной системы $X = \beta + \alpha X$ так же, как и процесс последовательных приближений, *сходится к единственному* *решению при любом выборе начального приближения, если какая-нибудь из норм матрицы α меньше единицы, т. е. если*

$$\|\alpha\|_1=\max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|<1,$$

либо

$$\|\alpha\|_2=\max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|<1,$$

либо

$$\|\alpha\|_3=\sqrt{\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2}<1.$$

Процесс Зейделя сходится к единственному решению быстрее процесса простой итерации.

Пример 2. Проверить, сходится ли процесс Зейделя для системы, рассмотренной в примере 1.

Решение. 1) После приведения системы к нормальному виду (см. стр. 98) получаем матрицу

$$\alpha=\begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix}.$$

2) Находим

$$\|\alpha\|_1 = \max\,(0,53;\ 0,75;\ 0,57) = 0,75 < 1.$$

Следовательно, процесс итерации для данной системы сходится к единственному решению, несмотря на то, что

$$\|\alpha\|_2=\max \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|=\max\,(0,59;\ 0,16;\ 1,1)=1,1>1.$$

§ 2.19. Оценка погрешности процесса Зейделя

Пусть дана линейная система $X = \beta + \alpha X$. Если X_i — точное *значение корней линейной системы, а* $X_i^{(k)}$ — k-е приближение, вычисленное по методу Зейделя, то для *оценки погрешности* этого метода применяется формула

$$\|X-X^{(k)}\|_1 \leqslant \frac{\|\alpha\|_1^{(k)}}{1-\|\alpha\|_1}\,\|X^{(1)}-X^{(0)}\|_1. \tag{1}$$

Пример. Подсчитать, сколько итераций по методу Зейделя необходимо выполнить, чтобы с точностью до 10^{-4} найти корни системы

$$\begin{cases} 9,9x_1-1,5x_2+2,6x_3=0, \\ 0,4x_1+13,6x_2-4,2x_3=8,2, \\ 0,7x_1+0,4x_2+7,1x_3=-1,3. \end{cases}$$

Решение. 1) Приведем систему к нормальному виду (см. стр. 96):

$$\begin{cases} x_1 = 0,01x_1 + 0,15x_2 - 0,26x_3, \\ x_2 = 0,41 - 0,02x_1 + 0,32x_2 + 0,21x_3, \\ x_3 = -0,13 - 0,07x_1 - 0,04x_2 + 0,29x_3. \end{cases}$$

2) За нулевые приближения примем столбец свободных членов: $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 0,41$; $x_3^{(0)} = -0,13$ и вычислим первые приближения

$$x_1^{(1)} = 0,01\cdot 0 + 0,15\cdot 0,41 - 0,26\cdot(-0,13) = 0,0953,$$

$$x_2^{(1)} = 0,41 - 0,02\cdot 0,0953 + 0,32\cdot 0,41 + 0,21\cdot(-0,13) = 0,5120,$$

$$x_3^{(1)} = -0,13 - 0,07\cdot 0,0953 - 0,04\cdot 0,5120 + 0,29(-0,13) = -0,1948.$$

3) Матрица

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,15 & -0,26 \\ -0,02 & 0,32 & 0,21 \\ -0,07 & -0,04 & 0,29 \end{bmatrix}.$$

Значит, $\|\alpha\|_1 = \max(0,42;\ 0,55;\ 0,40) = 0,55$. Поскольку

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,41 \\ -0,13 \end{bmatrix} \text{ и } X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,0953 \\ 0,5120 \\ -0,1948 \end{bmatrix},$$

имеем

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,0953 \\ 0,1120 \\ -0,0648 \end{bmatrix}, \quad \text{т. е. } \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_1 = 0,1120.$$

4) По формуле (1) определяем k:

$$10^{-4} \leqslant \frac{0,55^k}{0,45}\cdot 0,1120;\ 10^{-4}\cdot 0,45 \leqslant 0,55^k\cdot 0,1120;$$

$$-4\ \lg 10 + \lg 0,45 \leqslant k \lg 0,55 + \lg 0,1120;$$

$$-4 - 0,3468 \leqslant k(-0,2596 - 0,9508);\ k \geqslant \frac{4,3468}{1,2104} = 3,59;\ k = 4.$$

Аналогично можно производить оценку метода Зейделя по норме 2.

§ 2.20. Приведение системы линейных уравнений к виду, удобному для итераций

Процессы последовательных приближений и Зейделя для линейной системы $X = \beta + \alpha X$ сходятся к единственному решению независимо от выбора начального вектора, если

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1\ (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ или } \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1\ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, для сходимости вышеуказанных итерационных процессов достаточно, чтобы значения элементов α_{ij} матрицы α при $i \neq j$ были небольшими по абсолютной величине. Это равносильно тому, что если для линейной системы $AX = B$ модули диагональных коэффициентов каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффицентов (не считая свободных членов), то итерационные процессы для этой системы сходятся, т. е. если мы имеем систему $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, причем $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$, то процессы последовательных приближений и Зейделя для данной системы сходятся.

Применяя элементарные преобразования, линейную систему $AX = B$ можно заменить такой эквивалентной системой $X = \beta + \alpha X$, для которой условия сходимости будут выполнены.

Пример 1. Привести данную систему линейных уравнений к виду, удобному для итераций

$$\begin{cases} 0,9x_1+2,7x_2-3,8x_3=2,4, & \text{(А)} \\ 2,5x_1+5,8x_2-0,5x_3=3,5, & \text{(Б)} \\ 4,5x_1-2,1x_2+3,2x_3=-1,2. & \text{(В)} \end{cases}$$

Решение. 1) Из заданной системы выделяем уравнения с коэффициентами, модули которых больше суммы модулей основных коэффициентов системы. Каждое выделенное уравнение выписываем в такую строку новой системы, чтобы наибольший по модулю коэффициент оказался диагональным.

В уравнении (Б) коэффициент при x_2 по модулю больше суммы модулей остальных коэффициентов. Принимаем уравнение (Б) за второе уравнение новой системы:

$$2,5x_1 + 5,8x_2 - 0,5x_3 = 3,5. \qquad \text{(II)}$$

2) Из оставшихся неиспользованных уравнений системы составляем линейно независимые между собой комбинации. Так, за первое уравнение новой системы можно взять линейную комбинацию (2В) + (А), тогда имеем

$$9,9x_1 - 1,5x_2 + 2,6x_3 = 0. \qquad \text{(I)}$$

За третье уравнение новой системы можно принять линейную комбинацию (2А) — (Б), т. е.

$$0,7x_1 + 0,4x_2 + 7,1x_3 = -1,3. \qquad \text{(III)}$$

3) В итоге получаем преобразованную систему линейных уравнений (I), (II), (III), эквивалентную исходной и удовлетворяющую условиям сходимости итерационного процесса:

$$\begin{cases} 9,9x_1-1,5x_2+2,6x_3=0, \\ 2,5x_1+5,8x_2-0,5x_3=3,5, \\ 0,7x_1+0,4x_2+7,1x_3=-1,3. \end{cases} \qquad (*)$$

Приведя систему (*) к нормальному виду, имеем

$$\begin{cases} x_1=0,1x_1+0,15x_2-0,26x_3, \\ x_2=0,35x_1-0,21x_2+0,42x_3+0,05, \\ x_3=-0,13x_1-0,07x_2-0,04x_3+0,29; \end{cases} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,15 & -0,26 \\ 0,35 & -0,21 & 0,42 \\ -0,13 & -0,07 & -0,04 \end{bmatrix};$$

$$\|\alpha\|_2 = \max(0,58;\ 0,43;\ 0,72) = 0,72 < 1.$$

Остается решить систему одним из итерационных методов.

§ 2.21. Исправление элементов приближенной обратной матрицы

Пусть дана неособенная матрица A и требуется найти ей обратную A^{-1}. Предположим, что мы получили приближенное значение обратной матрицы

$$D_0 = A^{-1}.$$

Тогда для улучшения точности воспользуемся методом последовательных приближений следующим образом. За нулевое приближение обратной матрицы A^{-1} принимаем значение D_0, погрешность которого есть матрица

$$F_0 = E - AD_0.$$

Дальнейшие последовательные приближения будем строить по формуле

$$D_k = D_{k-1} + D_{k-1}F_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$

и соответствующая погрешность

$$F_k = E - AD_k.$$

Если все элементы матрицы $F_0 = [f_{ij}]$ удовлетворяют неравенству $|f_{ij}| \leqslant \frac{q}{n}$, где n — порядок матрицы и $0 \leqslant q < 1$, то процесс итераций заведомо сходится.

Оценка погрешности данного метода имеет вид

$$\| A^{-1} - D_k \| \leqslant \frac{\| D_0 \|}{1-q} q^{2^k}, \qquad (2)$$

где под нормой понимается норма 1 или норма 2.

Процесс уточнения элементов обратной матрицы прекращается, когда обеспечено неравенство $\| D_k - D_{k-1} \| \leqslant \varepsilon$, где ε — заданная точность.

Пример Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1,16 & 0,83 & -0,66 \\ 0,45 & -0,54 & 0,83 \\ 0,32 & 0,28 & 1,06 \end{bmatrix}$$

исправить элементы приближенной обратной матрицы с точностью до 10^{-5}.

Р е ш е н и е. 1) Методом Гаусса находим приближенную обратную матрицу

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0,495 & 0,655 & -0,205 \\ 0,326 & -0,886 & 0,896 \\ -0,235 & 0,036 & 0,768 \end{bmatrix}.$$

Далее, получаем

$$AD_0 = \begin{bmatrix} 0,99988 & 0,00066 & -0,00100 \\ 0,00016 & 0,99957 & -0,00015 \\ 0,00058 & -0,00032 & 0,99936 \end{bmatrix},$$

$$F_0=E-AD_0=\begin{bmatrix} 0,00012 & -0,00066 & 0,00100 \\ -0,00016 & 0,00043 & 0,00015 \\ -0,00058 & 0,00032 & 0,00064 \end{bmatrix}.$$

Так как $\| F_0 \|_1 = 0{,}00178 < 1$, то итерационный процесс сходится.

2) Пользуясь формулой (1), находим следующее приближение D_1. Имеем

$$D_0 F_0=\begin{bmatrix} 0,000164 & -0,000111 & 0,000462 \\ -0,000339 & -0,000309 & 0,000767 \\ -0,000479 & 0,000416 & 0,000262 \end{bmatrix},$$

$$D_1=D_0+D_0 F_0=\begin{bmatrix} 0,495164 & 0,654889 & -0,204538 \\ 0,325661 & -0,886309 & 0,896767 \\ -0,235479 & 0,036416 & 0,768262 \end{bmatrix},$$

$$AD_1=\begin{bmatrix} 1,00010501 & -0,00000021 & -0,00000039 \\ 0,00006849 & 0,99999889 & -0,00000022 \\ 0,00002982 & -0,00000108 & 1,00000032 \end{bmatrix},$$

$$F_1=E-AD_1=\begin{bmatrix} -0,00010501 & 0,00000021 & 0,00000039 \\ -0,00006849 & 0,00000111 & 0,00000022 \\ -0,00002982 & 0,00000108 & -0,00000032 \end{bmatrix}.$$

3) Аналогичным образом получим приближение D_2:

$$D_1 F_1=\begin{bmatrix} -0,000091 & 0,000001 & 0 \\ 0 & 0,000001 & 0 \\ -0,000001 & 0,000001 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_2=D_1+D_1 F_1=\begin{bmatrix} 0,495073 & 0,654890 & -0,204538 \\ 0,325661 & -0,886308 & 0,896767 \\ -0,235480 & 0,036417 & 0,768262 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^{-1}\approx\begin{bmatrix} 0,49507 & 0,65489 & -0,20454 \\ 0,32566 & -0,88631 & 0,89677 \\ -0,23548 & 0,03642 & 0,76826 \end{bmatrix}.$$

Упражнения

1. Вычислить AB, если

а) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Ответы: а) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 9 & 9 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$.

2. Вычислить $2(A+B)(2B-A)$, если

а) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$.

Ответы: а) $\begin{bmatrix} 8 & -56 & 54 \\ -30 & -100 & 146 \\ 118 & -82 & 28 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -72 & -72 & 78 \\ 36 & 54 & -6 \\ 66 & 240 & 88 \end{bmatrix}$.

3. Найти произведение XY, если

а) $X=\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $Y=[1\ \ 2\ \ -2\ \ 3]$; б) $X=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $Y=[4\ \ 5]$;

в) $X=[10\ \ 17\ \ 8\ \ 5\ \ 11]$, $Y=\begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Ответы: а) $\begin{bmatrix} 5 & 10 & -10 & 15 \\ 7 & 14 & -14 & 21 \\ -3 & -6 & 6 & -9 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$; в) 409.

4. Найти произведение AX, если

а) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -7 & -1 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Ответы: а) $\begin{bmatrix} -9 \\ 20 \\ -18 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

5. Вычислить определители

а) $d=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; б) $d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & -3 \\ 5 & 6 & 8 & -4 \end{vmatrix}$;

в) $d=\begin{vmatrix} 1,6 & 5,4 & -7,7 & -3,1 \\ 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \end{vmatrix}$.

Ответы: а) 22; б) —26; в) 4279,1.

6. Вычислить A^{-1} для следующих матриц:

$$\text{а)}\quad A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix};\qquad \text{б)}\quad A=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)}\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответы: а) $A^{-1}=\begin{bmatrix} -12 & -1 & 8 \\ -9 & -1 & 6 \\ -7 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; б) $A^{-1}=$

$$=\frac{1}{48}\begin{bmatrix} -4 & 10 & -46 & 24 \\ 10 & -1 & 67 & -36 \\ -14 & -13 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -96 & 48 \end{bmatrix};\quad \text{в)}\ A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & 9 & 6 & 0 \\ -28 & -5 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

7. Для матриц

$$A=\begin{bmatrix} -0,3 & 1,2 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 1,6 \\ -1,5 & -0,3 & 0,1 \end{bmatrix}\quad \text{и}\quad B=\begin{bmatrix} 0,2 & 0,44 & 0,81 \\ 0,58 & -0,29 & 0,05 \\ 0,05 & 0,34 & 0,1 \end{bmatrix}$$

вычислить норму 1, норму 2 и норму 3.

Ответы: *а*) $\|A\|_1=1,9$; $\|A\|_2=1,9$; $\|A\|_3=2,55$; б) $\|B\|_1=1,45$; $\|B\|_2=$ $=1,07$; $\|B\|_3=1,20$.

8. Найти AB, где

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 6 \\ 6 & 10 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

двумя способами: а) разбив A и B на квадратные клетки; б) разбив A и B на клетки окаймлением.

Ответ: $AB=\begin{bmatrix} 24 & 57 & 15 & 31 \\ -4 & 16 & 6 & 11 \\ 16 & 27 & 7 & 14 \\ 10 & 53 & 13 & 29 \end{bmatrix}$.

9. Вычислить A^{-1}, применив разбиение на квадратные клетки и окаймление, если:

$$\text{а)}\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix};\qquad \text{б)}\quad A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ответы: а) $$A^{-1}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

б) $$A^{-1}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & 8 \\ -12 & 5 & 9 & -1 \\ -12 & 11 & 9 & -13 \\ -6 & -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Матрицы, заданные в упр. 9, разложить на произведение двух треугольных и обратить их, применяя разложение матриц на произведение двух треугольных.

Ответы: а) $$A=T_1T_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -18/5 & 0 \\ 2 & -7 & 36/5 & 18 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 8/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1}=T_2^{-1}T_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/5 & 2 \\ 0 & 1 & -8/5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ 7/18 & 4/18 & -5/18 & 0 \\ -2/18 & -3/18 & 2/18 & 1/18 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

б) $$A=R_1R_2=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7/3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1/7 & 0 \\ 1 & 8/3 & -9/7 & 18 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1}=R_2^{-1}R_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & -4/7 & 8 \\ 0 & 1 & 1/7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/7 & 3/7 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 7 & 0 \\ -1/3 & -5/18 & 9/18 & 1/8 \end{bmatrix}=$$

$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & 8 \\ -12 & 5 & 9 & -1 \\ -12 & 11 & 9 & -13 \\ -6 & -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Решить матричные уравнения:

$$\text{а)}\ X\cdot\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -8 & 3 & 6 \\ 11 & 9 & 13 \end{bmatrix};$$

$$\text{б)}\ \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -8 & 3 & 6 \\ 11 & 9 & 13 \end{bmatrix}\cdot X = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -4 \\ 21 & 14 & -10 \\ 48 & 2 & 30 \end{bmatrix}.$$

Ответы: а) $X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$; б) $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

12. Следующие системы линейных уравнений решить по формулам Крамера:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -14; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 11x + 3y - z = 15, \\ 2x + 5y - 5z = -11, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Ответы: а) $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$; б) $x = 2,\ y = -2,\ z = 1$.

13. Решить следующие системы по схеме Гаусса:

$$\text{а)} \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -8, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -6, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Ответы: а) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$; б) $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 3$.

14. С точностью до 0,001 решить следующие системы по схеме Гаусса:

$$\text{а)} \begin{cases} 1{,}14x_1 - 2{,}15x_2 - 5{,}11x_3 = 2{,}05, \\ 0{,}42x_1 - 1{,}13x_2 + 7{,}05x_3 = 0{,}80; \\ -0{,}71x_1 + 0{,}81x_2 - 0{,}02x_3 = -1{,}07; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 0{,}61x + 0{,}71y - 0{,}05z = -0{,}16, \\ -1{,}03x - 2{,}05y + 0{,}87z = 0{,}50, \\ 2{,}5x - 3{,}12y + 5{,}03z = 0{,}95. \end{cases}$$

Ответы: а) $x_1 = 1{,}120$; $x_2 = -0{,}341$; $x_3 = -0{,}008$; б) $x = 0{,}008$; $y = -0{,}231$; $z = 0{,}042$.

15. Вычислить определители по схеме Гаусса:

$$\text{а)}\ d = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \qquad \text{б)}\ d = \begin{vmatrix} -1{,}6 & 5{,}4 & -7{,}7 & 3{,}1 \\ 8{,}2 & 1{,}4 & -2{,}3 & 0{,}2 \\ 5{,}3 & -5{,}9 & 2{,}7 & -7{,}9 \\ 0{,}7 & 1{,}9 & -8{,}5 & 4{,}8 \end{vmatrix}.$$

Ответы: а) $d = 88$; б) $d = 2111{,}97$.

16. Обратить следующие матрицы по схеме Гаусса:

$$\text{а) } A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \text{б) } A=\begin{bmatrix} 0,32 & 0,52 & -0,42 & 0,23 \\ 0,44 & -0,25 & 0,36 & -0,51 \\ -1,06 & 0,74 & -0,83 & 0,48 \\ 0,96 & 0,82 & 0,55 & 0,36 \end{bmatrix}.$$

Вычисления вести с тремя десятичными знаками, ответ округлить до двух десятичных знаков.

Ответы:
$$\text{а) } A^{-1}=\begin{bmatrix} 10/3 & -7/6 & 1/2 & -1/6 \\ -5/3 & 5/6 & -1/2 & -7/6 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A^{-1}=\begin{bmatrix} 1,19 & -0,31 & -0,82 & -0,12 \\ -0,17 & 1,57 & 1,23 & 0,70 \\ -1,75 & 0,11 & 0,30 & 0,87 \\ -0,12 & -2,92 & -1,09 & 0,17 \end{bmatrix}.$$

17. Решить следующие системы линейных уравнений с точностью до 0,01 методом последовательных приближений, предварительно определив необходимое количество шагов.

$$\text{а) } \begin{cases} 8,7x_1-3,1x_2+1,8x_3-2,2x_4=-9,7, \\ 2,1x_1+6,7x_2-2,2x_3=13,1, \\ 3,2x_1-1,8x_2-9,5x_3-1,9x_4=6,9, \\ 1,2x_1+2,8x_2-1,4x_3-9,9x_4=25,1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 6,1x+0,7y-0,05z=6,97, \\ -1,3x-2,05y+0,87z=0,10, \\ 2,5x-3,12y-5,03z=2,04. \end{cases}$$

Ответы: а) $x_1=-0,72$; $x_2=1,88$; $x_3=-0,92$; $x_4=-1,94$; б) $x=1,22$; $y=-0,67$, $z=0,35$.

18. Системы линейных уравнений из упр. 17 решить методом Зейделя, предварительно определив необходимое количество шагов.

Глава III

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 3.1. Алгебраические и трансцендентные уравнения

При решении практических задач часто приходится сталкиваться с решением уравнений. Всякое уравнение с одним неизвестным можно представить в виде

$$\varphi(x)=g(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ и $g(x)$ — данные функции, определенные на некотором числовом множестве X, называемом *областью допустимых значений уравнения*.

Уравнение с одним неизвестным можно записать в виде

$$f(x) = 0. \qquad (2)$$

Действительно, перенеся $g(x)$ в левую часть уравнения (1), имеем уравнение $\varphi(x) - g(x) = 0$, равносильное (1). Если обозначить левую часть последнего уравнения через $f(x)$, то получаем уравнение (2).

Совокупность значений переменной x, при которых уравнение (1) превращается в тождество, называется *решением* этого уравнения, а каждое значение x из этой совокупности называется *корнем* уравнения.

Например, уравнение $x^2 = 2 - x$ имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Подставив -2 и 1 в заданное уравнение вместо x, получим тождества: $(-2)^2 = 2 - (-2)$, т. е. $4 \equiv 4$; $1^2 = 2 - 1$, т. е. $1 \equiv 1$.

Решить уравнение — значит найти множество всех корней этого уравнения. Оно может быть конечным или бесконечным. Так, рассмотренное выше уравнение имеет два корня. Уравнение $\sin x = 0$ имеет решение $x = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Придавая n различные значения, получаем бесконечное множество корней.

Совокупность нескольких уравнений с несколькими неизвестными называют *системой уравнений* (неизвестное, обозначенное одной и той же буквой в каждом из уравнений, должно означать одну и ту же неизвестную величину.

Решением системы уравнений с несколькими неизвестными называется совокупность значений этих неизвестных, обращающая каждое уравнение системы в тождество.

Например, система

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$$

имеет решение $x = 2$, $y = 1$, так как при этих значениях неизвестных уравнения системы обращаются в тождества: $4 + 1 \equiv 5$, $2 + 1 \equiv 3$.

Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.

В зависимости от того, какие функции входят в уравнения (1) или (2), уравнения разделяются на два больших класса: алгебраические и трансцендентные.

Функция называется *алгебраической*, если для получения значения функции по данному значению x нужно выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем. (Операция извлечения корня может быть представлена как операция возведения в степень с показателем $1/n$.)

Алгебраическая функция называется *рациональной* относительно переменной x, если над x не производится никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Например:

$$f_1(x)=x^3+15x^2-1200x+4;\quad f_2(x)=\frac{2}{x-8}+\frac{45}{x+5};$$

$$f_3(x)=(x-4)(x+5);\quad f_4(x)=\frac{3}{x+7}+\frac{4x+3}{3x^2+5}.$$

Если в рациональную функцию переменная x не входит в качестве делителя или не входит в выражение, являющееся делителем, то такая функция называется *целой рациональной*.

Например, следующие функции:

1) $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ (n — натуральное число или нуль, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — любые действительные числа, причем $a_0\neq 0$);

2) $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x+8}{3}$

являются целыми рациональными. Целая рациональная функция определена на всей числовой оси.

Если в рациональной функции хотя бы один раз встречается деление на переменную x или переменная x входит в выражение, являющееся делителем, то такая функция называется *дробно-рациональной*.

Такова, например, функция

$$y=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n},$$

где m — натуральное число или нуль; n — натуральное число; $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ — любые действительные числа ($a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$). Дробно-рациональная функция определена на всей числовой оси, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

Функция называется *иррациональной*, если для получения значения функции по данному значению x нужно выполнить, кроме четырех арифметических действий (всех или некоторых), еще и извлечение корня. При этом функция будет иррациональной лишь тогда, когда аргумент x стоит под знаком радикала.

Так, функция

$$y=\frac{3x^3-4x+\sqrt[3]{x-1}}{7x-4}$$

является иррациональной, а функция

$$y=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{5}}{2}x+4}$$

иррациональной не является, поскольку x не стоит под знаком радикала.

Выше указывалось, что все рациональные и иррациональные функции относятся к классу алгебраических функций.

Другой большой класс функций — *трансцендентные* функции. К ним относятся все неалгебраические функции: показательная a^x, логарифмическая $\log_a x$, тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ и др.

Если в запись уравнения входят только алгебраические функции, то уравнение называется *алгабраическим*.

Например, уравнения

$$x^5 - 4 = 0, \; x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0$$

являются алгебраическими.

Алгебраическое уравнение может быть приведено к виду

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \tag{3}$$

Поэтому, когда говорят «алгебраическое уравнение», то обычно имеют в виду уравнение вида (3).

Если уравнение (3) получено преобразованием уравнения, в которое входила дробная рациональная или иррациональная функция, то необходимо учитывать, что эти функции определены не на всей числовой оси.

Например, уравнение

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} = 3$$

после освобождения от иррациональности примет вид

$$4x^2 - 16x - 47 = 0.$$

Однако первоначальное уравнение определено не на всей числовой оси, а для x, принадлежащих отрезку $[2, 6]$.

Числа a_0, a_1, ..., a_n называются *коэффициентами* уравнения (3), они могут быть как действительными, так и комплексными. В дальнейшем изложении будут рассматриваться алгебраические уравнения вида (3) только с действительными коэффициентами.

Решение уравнения с одним неизвестным заключается в отыскании *корней*, т. е. тех значений x, которые обращают уравнение в тождество. Корни уравнения могут быть вещественными и невещественными (комплексными).

Найти точные значения корней уравнения можно только в исключительных случаях, обычно, когда есть какая-либо простая формула для вычисления значения корней, выражающая их через известные величины.

Так, для нахождения корней квадратного уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ используется формула

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{4}$$

Для решения кубического уравнения вида $x^3 + px + q = 0$ применяется формула

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{5}$$

Однако практическое применение этой формулы весьма затруднительно и требует использования комплексных чисел.

Для решения уравнения четвертой степени также существует формула, однако она является настолько сложной, что практически не применяется, и мы ее рассматривать не будем.

Норвежский математик Абель доказал, что при $n \geqslant 5$ не существует формулы, выражающей решение алгебраического уравнения (3) при помощи арифметических операций и извлечения корней. Лишь для некоторых частных случаев алгебраических уравнений, степень которых больше четырех, могут существовать формулы решения.

Кроме того, коэффициенты некоторых уравнений являются приближенными числами и, следовательно, вопрос о нахождении точных корней вообще не может быть поставлен.

Поэтому большое значение приобретают методы приближенного вычисления корней уравнения $f(x) = 0$.

При решении многих практических задач точное решение уравнения не всегда является необходимым. Задача нахождения корней считается решенной, если корни вычислены с заданной степенью точности.

Как же следует понимать утверждение «корень вычислен с заданной степенью точности»? Пусть ξ — корень уравнения, $\bar{x}$—его приближенное значение с точностью до ε; это означает, что $|\xi - \bar{x}| \leqslant \varepsilon$. Если установлено, что искомый корень ξ заключен между числами a и b, т. е. $a < \xi < b$, причем $b - a \leqslant \varepsilon$, то числа a и b — это приближенные значения корня ξ соответственно с недостатком и с избытком с точностью до ε, так как $|\xi - a| < b - a \leqslant \varepsilon$ и $|\xi - b| < b - a \leqslant \varepsilon$. За приближенное значение корня ξ с точностью до ε можно принять любое число, содержащееся между a и b.

Например, если корень ξ заключен между 3,228 и 3,229 (т. е. $3{,}228 < \xi < 3{,}229$), то за приближенное значение корня с точностью до 0,001 можно принять числа 3,228, 3,229 и любое число, заключенное между ними.

В настоящей главе мы будем рассматривать способы приближенного решения уравнений и систем уравнений. Некоторые из них одинаково применимы к отысканию корней как трансцендентных, так и алгебраических уравнений. Другие способы применимы только к алгебраическим уравнениям.

§ 3.2. Графические методы решения уравнений и систем

Графические методы решения уравнений. Одним из методов решения уравнений является графический. Точность такого решения невелика, однако с помощью графика можно разумно выбрать первое приближение, с которого начнется дальнейшее решение уравнения. Существуют два способа графического решения уравнений.

Первый способ. Все члены уравнения переносят в левую часть, т. е. представляют его в виде $f(x) = 0$. После этого строят график функции $y = f(x)$, где $f(x)$—левая часть уравнения. Абсцисы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox и являются корнями уравнения, так как в этих точках $y = 0$ (рис. 3.1).

Второй способ. Все члены уравнения разбивают на две группы, одну из них записывают в левой части уравнения, а другую в правой, т. е. представляют его в виде $\varphi(x) = g(x)$. После этого строят графики двух функций $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$. Абсциссы точек пересечения графиков этих двух функций и служат корнями данного уравнения. Пусть точка пересечения графиков имеет абсциссу x_0, ординаты обоих графиков в этой точке равны между собой, т. е. $\varphi(x_0) = g(x_0)$. Из этого равенства следует, что x_0 — корень уравнения (рис. 3.2).

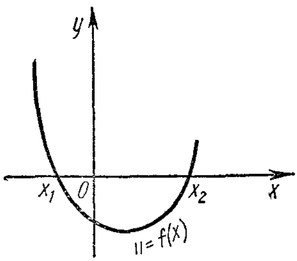


Рис. 3.1

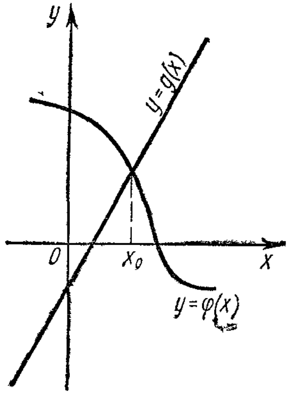


Рис. 3.2

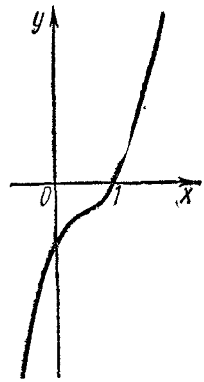


Рис. 3.3

Пример 1. Решить графически уравнение $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Решение. Первый способ. Построим график функции $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ и определим абсциссы точек пересечения этого графика с осью Ox. Кривая пересекает ось Ox в точке $x = 1$, следовательно, уравнение имеет один корень (рис. 3.3). (Отметим, что алгебраическое уравнение третьей степени имеет или один действительный корень или три. Так как кривая пересекает ось абсцисс только в одной точке, то данное уравнение имеет только один действительный корень. Остальные два корня — комплексные.)

Второй способ. Представим данное уравнение в виде $x^3 = 2x^2 - 2x + 1$ и построим графики функций $y = x^3$ и $y = 2x^2 - 2x + 1$. Найдем абсциссу точки пересечения этих графиков; получим $x = 1$ (рис. 3.4).

Пример 2. Найти приближенно графическим способом корни уравнения

$$\lg x - 3x + 5 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\lg x = 3x - 5.$$

Функции в левой и в правой части уравнения имеют общую область определения: интервал $0 < x < +\infty$. Поэтому будем искать корни именно в этом интервале.

Строим графики функций $y = \lg x$ и $y = 3x - 5$ (рис. 3.5). Прямая $y = 3x - 5$ пересекает логарифмическую кривую в двух точках с абсциссами $x_1 \approx 0{,}00001$ и $x_2 \approx 1{,}75$. На рисунке трудно показать пересечение графиков этих двух функций в первой точке, однако, учитывая, что нижняя ветвь логарифмической кривой неограниченно приближается к оси Oy, можно предполагать, что пересечение этих двух графиков произойдет вблизи точки пересечения графика функции $y = 3x - 5$ и оси Oy. Абсцисса точки пересечения приближенно равна 0,00001. Итак, корни уравнения $x_1 \approx 0{,}00001$ и $x_2 \approx 1{,}75$.

Пример 3. Найти графически корни уравнения $2^x = 2x$

Решение. Строим графики функций $y = 2^x$ и $y = 2x$ Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Данное уравнение имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ (рис. 3 6).

Подводя итог вышеизложенному, можно рекомендовать для графического решения уравнения $f(x) = 0$, все корни которого лежат в промежутке $[a, b]$, следующую простую схему.

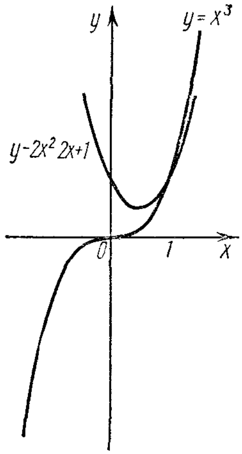


Рис 3 4

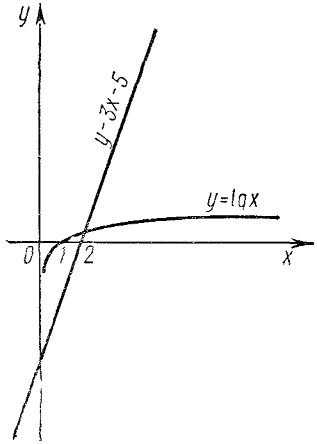


Рис 3 5

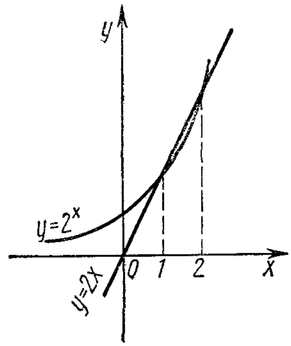


Рис 3 6

1. Представить указанное уравнение в виде $\varphi(x) = g(x)$ с таким расчетом, чтобы функции $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ были просты и удобны для исследования и построения.

2. На миллиметровой бумаге вычертить графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ в промежутке $[a, b]$.

3. Если графики не пересекаются, то корней в данном промежутке нет. Если же графики пересекаются, то нужно определить точки их пересечения, найти абсциссы этих точек, которые и будут приближенными значениями корней рассматриваемого уравнения.

Графические методы решения систем уравнений. Мы видели, что решение графическим методом уравнений с одним неизвестным не вызывает особых затруднений. Этого нельзя сказать о решении графическим методом систем уравнений. Часто даже решение системы двух уравнений с двумя неизвестными оказывается весьма сложным.

Пусть задана система

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Если оба уравнения системы можно разрешить относительно одной из двух переменных, то решение системы значительно упрощается. Пусть из первого уравнения системы имеем $y = f_1(x)$, а из второго

$y = f_2(x)$. В результате получаем уравнение $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$, которое решаем одним из рассмотренных выше способов.

Пример 4. Найти графически решение системы уравнений

$$\begin{cases} xy + \cos x = 0, \\ x + y - \sin x = 0, \end{cases}$$

считая $x > 0$.

Р е ш е н и е. Разрешаем заданные уравнения относительно y:

$$y = -\frac{\cos x}{x}, \quad y = \sin x - x,$$

т е.

$$\sin x - x = -\frac{\cos x}{x}.$$

Строим графики функций $y = \sin x - x$ и $y = -\frac{\cos x}{x}$ (рис. 3.7). Абсцисса и ордината точки пересечения графиков этих функций и дают решение системы: $x \approx 1{,}22$; $y \approx -0{,}28$.

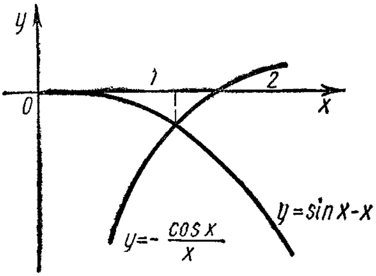


Рис. 3.7

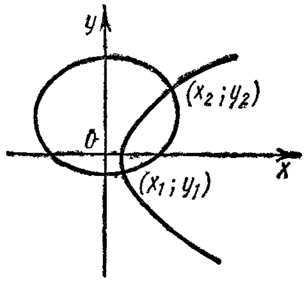


Рис. 3.8

Пример 5. Найти графически решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 6y - 4 = 0, \\ x^2 - 3y^2 + 4x - 2 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Перепишем заданную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3(y-1)^2 = 7, \\ (x+2)^2 - 3y^2 = 6. \end{cases}$$

Первое из преобразованных уравнений определяет эллипс, второе — гиперболу. Кривые, соответствующие полученным уравнениям, пересекаются в двух точках $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 3.8). Если на миллиметровой бумаге сделать более точный чертеж, то можно определить $x_1 \approx 0{,}55$; $y_1 \approx -0{,}46$; $x_2 \approx 1{,}7$; $y_2 \approx 1{,}6$.

§ 3.3. Отделение корней

В предыдущем параграфе был рассмотрен вопрос о графическом решении уравнений и систем уравнений. Однако даже при очень тщательном построении чертежа значения корней можно получить с небольшой степенью точности. Поэтому чтобы эти значения получить с любой заданной степенью точности, необходимо применять методы, которые позволяют «уточнять» найденные значения.

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнения разбивается на два этапа: 1) отделение корней; 2) уточнение корней до заданной степени точности.

В настоящем параграфе рассматривается первый этап — о т д е л е н и е корней.

Корень ξ уравнения $f(x) = 0$ считается *отделенным* на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке уравнение $f(x) = 0$ не имеет других корней.

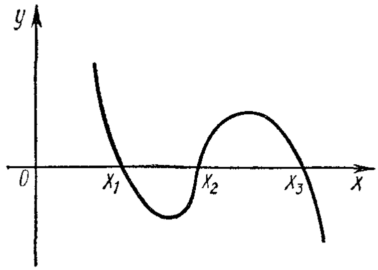


Рис. 3.9

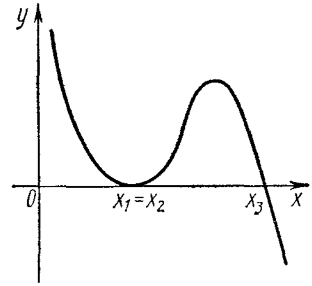


Рис. 3.10

Отделить корни — это значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится один корень. Отделение корней можно произвести двумя способами — *графическим* и *аналитическим*.

Графический метод отделения корней. При графическом методе отделения корней поступают так же, как и при графическом методе решения уравнений.

Строят график функции $y = f(x)$ для уравнения вида $f(x) = 0$ или представляют уравнение в виде $\varphi(x) = g(x)$ и строят графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$. Значения действительных корней уравнения являются абсциссами точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox или абсциссами точек пересечения графиков функций $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$. Отрезки, в которых заключено только по одному корню, легко находятся.

З а м е ч а н и е. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 3.9. Кривая трижды пересекает ось абсцисс; следовательно, уравнение имеет три простых корня.

Если же кривая касается оси абсцисс (рис. 3.10), то уравнение имеет двукратный корень. Например, уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$ имеет три корня: $x_1 = -2$; $x_2 = x_3 = 1$ (рис. 3.11).

Если же уравнение имеет трехкратный действительный корень, то в месте касания с осью кривая $y = f(x)$ имеет точку перегиба (рис. 3.12). Например, уравнение $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ имеет трехкратный корень, равный единице (рис. 3.13).

Графический метод отделения корней не обладает большой точностью. Он дает возможность грубо определить интервалы изоляции корня. Далее корни уточняются одним из способов, указанных ниже.

Аналитический метод отделения корней. Аналитически корни уравнения $f(x) = 0$ можно отделить, используя некоторые свойства функций, изучаемые в курсе математического анализа.

Сформулируем без доказательства теоремы, знание которых необходимо при отделении корней.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка $[a, b]$ существует по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то*

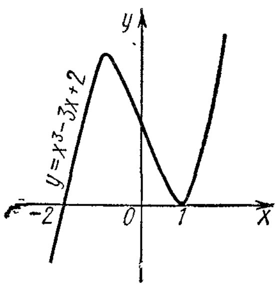


Рис. 3.11

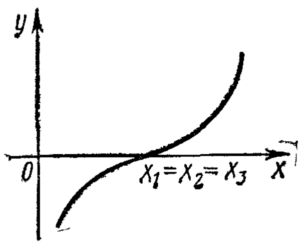


Рис. 3.12

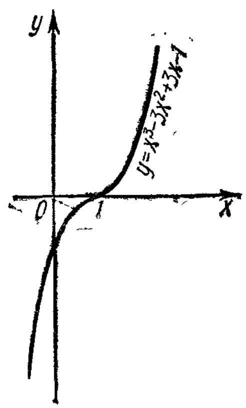


Рис. 3.13

внутри отрезка $[a, b]$ содержится корень уравнения $f(x) = 0$, и этот корень единственный.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует корень уравнения $f(x) = 0$ и притом единственный.*

Приведем теперь некоторые сведения из математического анализа, которые понадобятся в дальнейшем.

Если функция $f(x)$ задана аналитически, то *областью существования (областью определения) функции называется совокупность* всех тех действительных значений аргумента, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает только действительные значения.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*, если с возрастанием аргумента значение функции увеличивается (рис. 3.14, *а* и *в*), и *убывающей*, если с возрастанием аргумента значение функции уменьшается (рис. 3.14, *б* и *г*).

Функция называется *монотонной*, если она в заданном промежутке либо только возрастает, либо только убывает.

Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак на интервале (a, b). Тогда если во всех точках интервала (a, b) первая производная положительна, т. е. $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ в этом интервале возрастает (рис. 3.14, *а* и *в*)

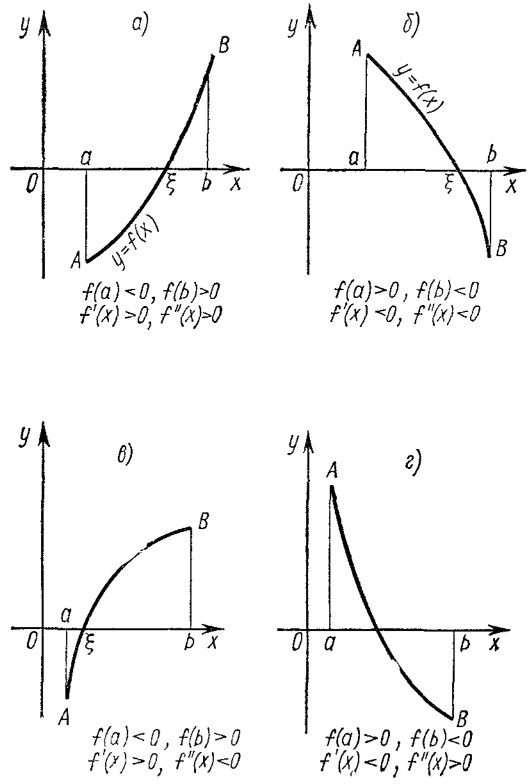


Рис. 3.14

Если же во всех точках интервала (a, b) первая производная отрицательна, т. е. $f'(x) < 0$, то функция в этом интервале убывает (рис. 3.14, *б* и *г*). Корнем функции служит абсцисса точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью Ox.

Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет производную второго порядка, которая сохраняет постоянный знак на всем отрезке. Тогда если $f''(x) > 0$, то график функции является выпуклым вниз (рис. 3.14, *а* и *г*); если же $f''(x) < 0$, то график функции является выпуклым вверх (рис. 3.14, *б* и *в*).

Точки, в которых первая производная функции равна нулю, а также те, в которых она не существует (например, обращается в бесконечность), но функция сохраняет непрерывность, называются *критическими* (этот признак является необходимым признаком экстремума).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Этих значений функция достигает или в критических точках, или на концах отрезка. Следовательно, чтобы определить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, надо: 1) определить критические точки функции; 2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка $[a, b]$; 3) наибольшее из значений, найденных в п. 2), будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции на отрезке.

В связи с вышеизложенным можно рекомендовать следующий порядок действий для отделения корней аналитическим методом.

1. Найти $f'(x)$ — первую производную.

2. Составить таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равным: а) критическим значениям (корням) производной или ближайшим к ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного).

3. Определить интервалы, на концах которых функция принимает значения противоположных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному и только по одному корню.

Пример. Отделить корни уравнения $2^x - 5x - 3 = 0$ аналитическим методом.

Решение. Обозначим $f(x) = 2^x - 5x - 3$. Область определения функции $f(x)$ — вся числовая ось. Найдем первую производную

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 5.$$

Приравниваем эту производную нулю и вычисляем корень:

$$2^x \ln 2 - 5 = 0; \quad 2^x \ln 2 = 5; \quad 2^x = \frac{5}{\ln 2}; \quad x \lg 2 = \lg 5 - \lg \ln 2;$$

$$x = \frac{\lg 5 - \lg \ln 2}{\lg 2} = \frac{0{,}6990 + 0{,}1592}{0{,}3010} = \frac{0{,}8582}{0{,}3010} = 2{,}85.$$

Составляем таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равным: а) критическим значениям (корням производной) или ближайшим к ним; б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного):

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	+	−	−	+

Уравнение имеет два корня, так как происходят две перемены знака функции.

Составим новую таблицу, с более мелкими интервалами изоляции корня:

x	−1	0	1	2	3	4	5
$\operatorname{sign} f(x)$	+	−	−	−	−	−	+

Корни уравнения заключены в промежутках $(-1, 0)$ и $(4, 5)$.

§ 3.4. Уточнение корней. Метод проб

Предыдущий параграф был посвящен первому из этапов приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений — отделению корней.

Второй этап — у т о ч н е н и е корней, т. е. доведение их до заданной степени точности.

В настоящем параграфе рассматриваются некоторые способы уточнения корней, применяемые для решения как алгебраических, так и трансцендентных уравнений. Существуют, однако, приемы, которые применимы только для решения алгебраических уравнений. Их мы рассмотрим ниже.

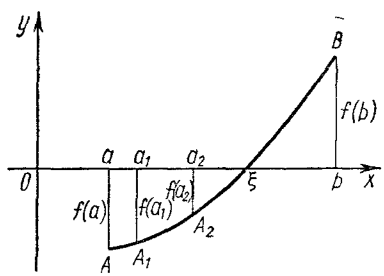


Рис 3 15

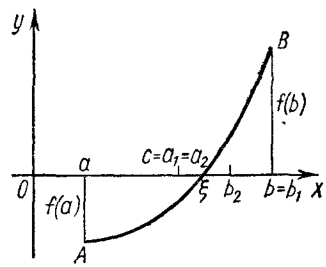


Рис. 3 16

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ — непрерывная функция. Требуется найти корень этого уравнения ξ с точностью до ε, где ε — некоторое положительное достаточно малое число.

Будем считать, что корень ξ отделен и находится на отрезке $[a, b]$, т. е. имеет место неравенство $a \leqslant \xi \leqslant b$. Числа a и b — приближенные значения корня ξ соответственно с недостатком и с избытком. Погрешность этих приближений не превышает длины отрезка $b - a$. Если $b - a \leqslant \varepsilon$, то необходимая точность вычислений достигнута, и за приближенное значение корня ξ можно принять либо a, либо b. Но если $b - a > \varepsilon$, то требуемая точность вычислений не достигнута и необходимо сузить интервал, в котором находится корень ξ, т. е. подобрать такие числа $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы выполнялись неравенства $\bar{a} < \xi < \bar{b}$ и $\bar{b} - \bar{a} < b - a$. При $\bar{b} - \bar{a} \leqslant \varepsilon$ вычисления следует прекратить и за приближенное значение корня с точностью до ε принять либо $\bar{a}$, либо $\bar{b}$. Следует отметить, что значение корня будет более точным, когда за приближенное значение корня приняты не концы отрезка $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а середина этого отрезка, т. е. $c = (\bar{a} + \bar{b})/2$. Погрешность в этом случае не превышает величины $(\bar{b} - \bar{a})/2$.

Метод проб. Пусть дано уравнение $f(x) = 0$ [$f(x)$ — непрерывная функция] и корень ξ отделен на отрезке $[a, b]$, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, причем $b - a > \varepsilon$. Требуется найти значение корня ξ с точностью до ε (рис. 3.15)

На отрезке $[a, b]$ выберем произвольным образом точку a_1, которая разделит его на два отрезка $[a, a_1]$ и $[a_1, b]$. Из этих двух отрезков следует выбрать тот, на концах которого функция принимает значения, противоположные по знаку. В нашем примере $f(a) \cdot f(a_1) > 0$, $f(a_1) \cdot f(b) < 0$; поэтому следует выбрать отрезок $[a_1, b]$. Затем на этом суженом отрезке опять произвольным образом возьмем точку a_2 и найдем знаки произведений $f(a_1) \cdot f(a_2)$ и $f(a_2) \cdot f(b)$. Так как $f(a_2) \times \times f(b) < 0$, то выбираем отрезок $[a_2, b]$. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока длина отрезка, на котором находится корень, не станет меньше ε. Корень ξ получим как среднее арифметическое концов найденного отрезка, причем погрешность корня не превышает $\varepsilon/2$.

Метод проб в таком виде, как он описан выше, на ЭВМ не применяется. Для составления программ и расчетов на ЭВМ метод проб применяется в виде так называемого *метода половинного деления.*

Пусть корень ξ уравнения $f(x) = 0$ отделен и находится на отрезке $[a, b]$, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, причем $b - a > \varepsilon$ [здесь $f(x)$ — непрерывная функция]. Как и ранее, возьмем на отрезке $[a, b]$ промежуточную точку, однако не произвольным образом, а так, чтобы она являлась серединой отрезка $[a, b]$, т. е. $c = (a + b)/2$. Тогда отрезок $[a, b]$ точкой c разделится на два равных отрезка $[a, c]$ и $[c, b]$, длина которых равна $(b - a)/2$ (рис. 3.16). Если $f(c) = 0$, то c — точный корень уравнения $f(x) = 0$. Если же $f(c) \neq 0$, то из двух образовавшихся отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ выберем тот, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков; обозначим его $[a_1, b_1]$. Затем отрезок $[a_1, b_1]$ также делим пополам и проводим те же рассуждения. Получим отрезок $[a_2, b_2]$, длина которого равна $(b - a)/2^2$. Процесс деления отрезка пополам производим до тех пор, когда на каком-то n-м этапе либо середина отрезка будет корнем уравнения (случай, весьма редко встречающийся на практике), либо будет получен отрезок $[a_n, b_n]$ такой, что $b_n - a_n = (b - a)/2^n \leqslant \varepsilon$ и $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$ (число n указывает на количество проведенных делений). Числа a_n и b_n — корни уравнения $f(x) = 0$ с точностью до ε. За приближенное значение корня, как указывалось, выше, следует взять $\xi = (a_n + b_n)/2$, причем погрешность не превышает $(b - a)/2^{n+1}$.

Пример 1. Методом проб уточнить до $\varepsilon = 10^{-3}$ меньший корень уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 3 = 0.$$

Решение. Отделим корни этого уравнения аналитически. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Приравняем $f'(x)$ нулю и вычислим корень производной:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x; \ 3x^2 + 6x = 0; \quad x(x + 2) = 0; \ x_1 = 0, \ x_2 = -2.$$

Составляем таблицу знаков функции:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Видим, что первый корень содержится в интервале $(-\infty, -2)$. Возьмем для пробы $x = -3$ и найдем $f(-3) = -3$:

x	-3	-2	-1	0	1
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Следовательно, корни уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ содержатся в интервалах $(-3, -2)$; $(-2, -1)$; $(0, 1)$.

Уточним меньший корень, лежащий в интервале $(-3, -2)$, методом половинного деления. Для удобства вычислений составим таблицу (см. табл. 3.1). [Знаки «$-$» и «$+$» в верхних индексах a_n и b_n означают, что $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$.]

Таблица 3.1

n	a_n^-	b_n^+	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	x_n^3	$3x_n^2$	$f(x_n)$
0	-3	-2	$-2{,}500$	$-15{,}625$	$18{,}750$	$0{,}125$
1	-3	$-2{,}500$	$-2{,}750$	$-20{,}800$	$22{,}689$	$-1{,}111$
2	$-2{,}750$	$-2{,}500$	$-2{,}625$	$-17{,}990$	$20{,}670$	$-0{,}320$
3	$-2{,}625$	$-2{,}500$	$-2{,}563$	$-16{,}840$	$19{,}701$	$-0{,}139$
4	$-2{,}563$	$-2{,}500$	$-2{,}532$	$-16{,}230$	$19{,}233$	$0{,}003$
5	$-2{,}563$	$-2{,}532$	$-2{,}548$	$-16{,}540$	$19{,}479$	$-0{,}071$
6	$-2{,}548$	$-2{,}532$	$-2{,}540$	$-16{,}390$	$19{,}356$	$-0{,}034$
7	$-2{,}540$	$-2{,}532$	$-2{,}536$	$-16{,}310$	$19{,}293$	$-0{,}014$
8	$-2{,}536$	$-2{,}532$	$-2{,}534$	$-16{,}270$	$19{,}263$	$-0{,}007$
9	$-2{,}534$	$-2{,}532$	$-2{,}533$	$-16{,}250$	$19{,}248$	$-0{,}002$
10	$-2{,}533$	$-2{,}532$				

Итак, корень уравнения $x_1 \approx -2{,}532$.

Пример 2. Отделить графически корень уравнения

$$x^2 \log_{0,5}(x + 1) = 1.$$

Вычислить этот корень методом проб с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решение. Представим уравнение в виде

$$\log_{0,5}(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

и построим графики функций $y = \log_{0,5}(x + 1)$ и $y = 1/x^2$. Из рис. 3.17 видно, что уравнение имеет один корень $x_1 \approx -0{,}7$. Определим знаки функции слева и справа от x_1:

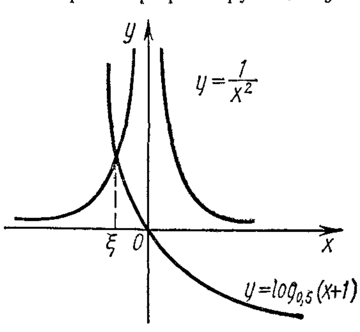


Рис. 3.17

x	$-0{,}8$	$-0{,}5$
$\operatorname{sign} f(x)$	$+$	$-$

Для удобства расчетов перейдем к десятичным логарифмам:

$$f(x) = x^2 \cdot \frac{\lg(x+1)}{\lg 0{,}5} - 1 = x^2 \cdot \frac{\lg(x+1)}{-0{,}301} - 1.$$

Составим следующую таблицу (табл 3 2).

Таблица 3 2

n	a_n^+	b_n^-	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	x_n^2	$\lg(x_n+1)$	$f(x_n)$
0	—0,8	—0,5	—0,65	0,4225	—0,4559	—0,360
1	—0,8	—0,65	—0,73	0,5329	—0,5686	—0,0067
2	—0,73	—0,65	—0,69	0,4761	—0,5086	—0,196
3	—0,73	—0,69	—0,71	0,5041	—0,5376	—0,099
4	—0,73	—0,71	—0,72	0,5184	—0,5528	—0,048
5	—0,73	—0,72				

Итак, $x_1 \approx -0,73$.

§ 3.5. Метод хорд

Метод хорд является одним из распространенных методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений. В литературе он также встречается под названиями «метода ложного положения» (regula falsi), «метода линейного интерполирования» и «метода пропорциональных частей».

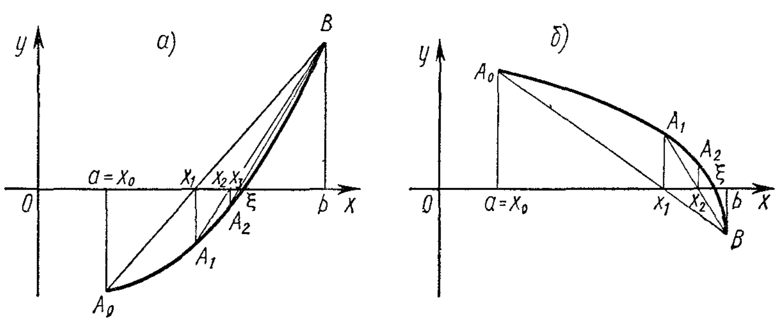


Рис. 3.18

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая в интервале (a, b) производные первого и второго порядков. Корень считается отделенным и находится на отрезке $[a, b]$, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Идея метода хорд состоит в том, что на достаточно малом промежутке $[a, b]$ дуга кривой $y = f(x)$ заменяется стягивающей ее хордой. В качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью Ox.

Ранее мы рассмотрели четыре случая расположения дуги кривой, учитывая значения первой и второй производных.

Рассмотрим случаи, когда первая и вторая производные имеют о д и н а к о в ы е знаки, т. е. $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

Пусть, например, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ (рис. 3.18, *а*). График функции проходит через точки A_0 $(a;\ f(a))$, B $(b;\ f(b))$. Искомый корень уравнения $f(x) = 0$ есть абсцисса точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox. Эта точка нам неизвестна, но вместо нее мы возьмем точку x_1 пересечения хорды A_0B с осью Ox. Это и будет приближенное значение корня.

Уравнение хорды, проходящей через точки A_0 и B, имеет вид

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Найдем значение $x = x_1$, для которого $y = 0$:

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

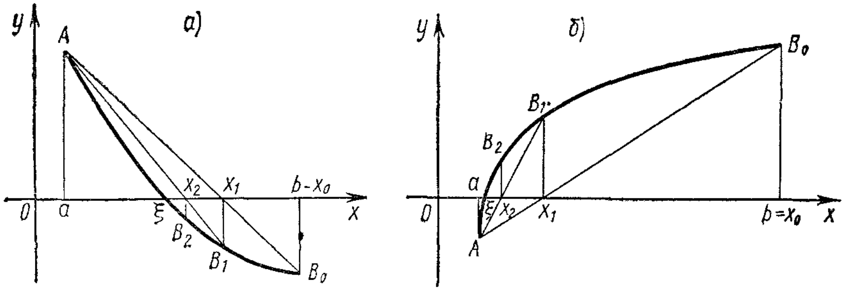


Рис. 3.19

Эта формула носит название формулы метода хорд. Теперь корень ξ находится внутри отрезка $[x_1,\ b]$. Если значение корня x_1 нас не устраивает, то его можно уточнить, применяя метод хорд к отрезку $[x_1,\ b]$. Соединим точку A_1 $(x_1;\ f(x_1))$ с точкой B $(b;\ f(b))$ и найдем x_2 — точку пересечения хорды A_1B с осью Ox:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)}.$$

Продолжая этот процесс, находим

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b-x_2)}{f(b)-f(x_2)}$$

и вообще

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}. \qquad (2)$$

Процесс продолжается до тех пор, пока мы не получим приближенный корень с заданной степенью точности.

По приведенным выше формулам вычисляются корни и для случая, когда $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ (рис. 3.18, *б*).

Теперь рассмотрим случаи, когда первая и вторая производные имеют разные знаки, т. е. $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

Пусть, например, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ (рис. 3.19, *а*). Соединим точки $A(a; f(a))$ и B_0 $(b; f(b))$ и запишем уравнение хорды, проходящей через A и B_0:

$$\frac{y-f(b)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-b}{b-a}.$$

Найдем x_1 как точку пересечения хорды с осью Ox, полагая $y=0$:

$$x_1=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}. \qquad (3)$$

Корень ξ теперь заключен внутри отрезка $[a, x_1]$.

Применяя метод хорд к отрезку $[a, x_1]$, получим

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(x_1-a)}{f(x_1)-f(a)}$$

и вообще

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}. \qquad (4)$$

По этим же формулам находится приближенное значение корня и для случая, когда $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ (рис. 3.19, *б*).

Итак, если $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то приближенный корень вычисляется по формулам (1) и (2); если же $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то — по формулам (3) и (4).

Однако выбор тех или иных формул можно осуществить, пользуясь простым правилом: *неподвижным концом отрезка является тот, для которого знак функции совпадает со знаком второй производной.*

Если $f(b) \cdot f''(x) > 0$, то неподвижен конец b, а все приближения к корню ξ лежат со стороны конца a [формулы (1) и (2)]. Если $f(a) \times \times f''(x) > 0$, то неподвижен конец a, а все приближения к корню ξ лежат со стороны конца b [формулы (3) и (4)].

При *оценке погрешности* приближения можно пользоваться формулой

$$|\xi-x_n|<|x_n-x_{n-1}|, \qquad (5)$$

где ξ — точное значение корня, а x_{n-1} и x_n — приближения к нему, полученные на $(n-1)$-м и n-м шагах. Однако эта формула справедлива лишь на достаточно малых отрезках. Ею можно пользоваться, если выполнено условие

$$M \leqslant 2m, \qquad (6)$$

где

$$M=\max_{[a,b]}|f'(x)|, \quad m=\min_{[a,b]}|f'(x)|.$$

Пример 1. Методом хорд уточнить до $\varepsilon = 0{,}001$ меньший корень уравнения $x^3+3x^2-3=0$. Корни уравнения отделены и меньший корень содержится на отрезке $[-3, -2]$ (см. пример 1 § 3.4).

Р е ш е н и е. Проверяем выполнение условия (6):

$$|f'(x)| = |3x^2 + 6x|;$$

$$M = \max_{[-3,-2]} |f'(x)| = |27 - 18| = 9; \quad m = \min_{[-3,-2]} |f'(x)| = |12 - 12| = 0;$$

$$M \not< 2m.$$

Возьмем середину отрезка $[-3, -2]$, т. е. точку $x = -2{,}5$, и выберем интервал $[-3; -2{,}5]$. Проверяем выполнение условия (6):

$$M = \max_{[-3;-2,5]} |f'(x)| = 9; \quad m = \min_{[-3;-2,5]} |f'(x)| = 3{,}75; \quad M \not< 2m.$$

Возьмем теперь середину отрезка $[-3; -2{,}5]$ — точку $x = -2{,}75$; $f(-2{,}75) < 0$, $f(-2{,}5) > 0$, $f(-3) < 0$; выбираем отрезок $[-2{,}75; 2{,}5]$. Находим

$$M = \max_{[-2,75;-2,5]} |f'(x)| = 6{,}189; \quad m = \min_{[-2,75;-2,5]} |f'(x)| = 3{,}75,$$

т. е. в этом случае выполнено условие $M < 2m$.

Таким образом, для оценки погрешности корня, лежащего на отрезке $[-2{,}75; -2{,}5]$, можно пользоваться формулой (5):

$$|\xi - x_n| < |x_n - x_{n-1}|,$$

т. е. процесс последовательного приближения к корню следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$.

Определим знак второй производной и установим, по какой формуле надо производить вычисления. Находим $f''(x) = 6x + 6$; на отрезке $[-2{,}75; -2{,}5]$ имеют место неравенства $f(-2{,}75) < 0$, $f(-2{,}75) \cdot f''(x) > 0$. Значит, за неподвижный конец отрезка нужно принять $x = -2{,}75$. Тогда вычисления следует вести по формулам (3) и (4):

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}; \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)},$$

где $a = -2{,}75$ и $f(a) = -1{,}111$. Если последнее выражение представить в виде

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)},$$

то сразу же можно будет получать разность между двумя последовательными приближениями и производить проверку на окончание вычислений, т. е. проверять выполнение неравенства $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$.

Все вычисления удобно производить в следующей таблице:

Таблица 3.3

n	x_n	x_n^3	x_n^2	$3x_n^2$	$f(x_n) = x_n^3 + 3x_n^2 - 3$	$x_n - a$	$-\frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}$
0	$-2{,}5$	$-15{,}625$	$6{,}250$	$18{,}75$	$0{,}125$	$0{,}25$	$-0{,}025$
1	$-2{,}525$	$-16{,}098$	$6{,}3756$	$19{,}1268$	$0{,}0288$	$0{,}225$	$-0{,}006$
2	$-2{,}531$	$-16{,}213$	$6{,}4060$	$19{,}2180$	$0{,}0050$	$0{,}219$	$-0{,}0009$
3	$-2{,}5319$						

Из табл. 3.3 видно, что $|x_3 - x_2| < 0{,}001$, поэтому округляя x_3 до тысячных долей, получим $\xi \approx -2{,}532$.

Пример 2. Методом хорд уточнить до $\varepsilon = 0{,}001$ корень уравнения $x - \sin x = 0{,}25$, заключенный на отрезке $[0, \pi/2]$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в виде $x - \sin x - 0{,}25 = 0$ и определим $f'(x) = 1 - \cos x$. Для проверки выполнения условия (6) составим вспомогательную таблицу, в первых двух столбцах которой указаны начало и конец выбранного интервала изоляции корня.

Таблица 3.4

a	b	Знаки $f(a)$	Знаки $f(b)$	M	m	Выполняется ли условие $M \leqslant 2m$	$\frac{a+b}{2}$	Знак $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0,00	1,57	—	+	1,00	0	нет	0,785	—
0,785	1,57	—	+	1,00	0,29251	нет	1,178	+
0,785	1,178	—	+	0,6172	0,2925	нет	0,982	—
0,982	1,178	—	+	0,6172	0,4446	да		

Из последней строки табл. 3.4 видно, что на отрезке [0,982; 1,178] условие $M \leqslant 2m$ *выполняется. Следовательно, при оценке погрешности приближенного* значения корня по методу хорд можно воспользоваться неравенством $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$. Корень уравнения $x - \sin x - 0{,}25 = 0$ находится на отрезке [0,982; 1,178]. Определим знак второй производной внутри отрезка:

$$f'(x) = 1 - \cos x; \; f''(x) = \sin x > 0.$$

Если возвратиться к прежним обозначениям, то $a = 0{,}982$, $b = 1{,}178$. Знак второй производной совпадает со знаком функции в точке b. Следовательно, этот конец отрезка является неподвижным, а все приближения к корню лежат со стороны конца a. Для вычисления корня пользуемся формулами (1) и (2):

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)};$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)},$$

где $b = 1{,}178$, $f(b) = 0{,}00416$. Составим следующую таблицу (табл. 3 5):

Таблица 3.5

n	x_n	$-\sin x_n$	$f(x_n) = x_n - \sin x_n - 0{,}25$	$b - x_n$	$-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$
0	0,982	—0,83161	—0,09961	0,196	0,189
1	1,171	—0,92114	—0,00014	0,007	0,0002
2	1,1712				

Итак, $x \approx 1{,}171$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

§ 3.6. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ отделен на отрезке $[a, b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют постоянные знаки на всем отрезке $[a, b]$.

Геометрический смысл *метода Ньютона* состоит в том, что дуга кривой $y = f(x)$ заменяется касательной к этой кривой (отсюда и второе название: *метод касательных*).

Первый случай. Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ (рис. 3.20, *а*) или $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ (рис. 3.20, *б*). Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B_0(b;\ f(b))$ и найдем абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox. Известно, что уравнение касательной в точке $B_0(b;\ f(b))$ имеет вид

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

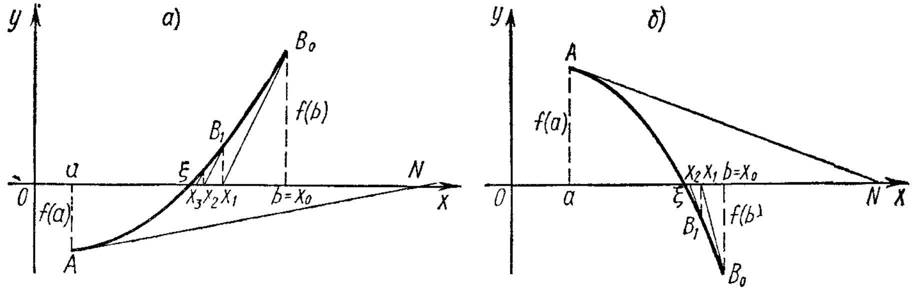


Рис. 3.20

Полагая $y = 0$, $x = x_1$, получим

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{1}$$

Теперь корень уравнения находится на отрезке $[a, x_1]$. Применяя снова метод Ньютона, проведем касательную к кривой в точке $B_1(x_1;\ f(x_1))$ и получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и вообще

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

Получаем последовательность приближенных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, каждый последующий член которой ближе к корню ξ, чем предыдущий. Однако все x_n остаются больше истинного корня ξ, т. е. x_n — приближенное значение корня ξ с избытком.

Второй случай. Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ (рис. 3.21, *а*) или $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ (рис. 3.21, *б*). Если снова провести касательную к кривой $y = f(x)$ в точке B, то она пересечет ось абсцисс в точке, не принадлежащей отрезку $[a, b]$. Поэтому проведем касательную в точке $A_0(a;\ f(a))$ и запишем ее уравнение для данного случая:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Полагая $y = 0$, $x = x_1$, находим

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{3}$$

Корень ξ находится теперь на отрезке $[x_1, b]$. Применяя снова метод Ньютона, проведем касательную в точке A_1 $(x_1; f(x_1))$ и получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и вообще

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{4}$$

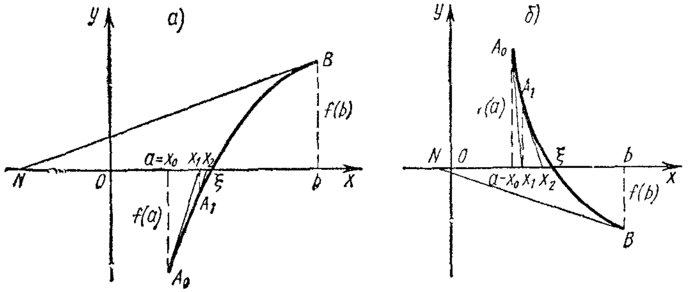


Рис. 3.21

Получаем последовательность приближенных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, каждый последующий член которой ближе к истинному корню ξ, чем предыдущий, т. е. x_n — приближенное значение корня ξ с недостатком.

Сравнивая эти формулы с ранее выведенными, замечаем, что они отличаются друг от друга только выбором начального приближения: в первом случае за x_0 принимался конец b отрезка, во втором — конец a.

При выборе начального приближения корня необходимо руководствоваться следующим правилом: *за исходную точку следует выбирать тот конец отрезка* $[a, b]$, *в котором знак функции совпадает со знаком второй производной*. В первом случае $f(b) \cdot f''(x) > 0$ и начальная точка $b = x_0$, во втором $f(a) \cdot f''(x) > 0$ и в качестве начального приближения берем $a = x_0$.

Для *оценки погрешности* можно пользоваться общей формулой

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{5}$$

где

$$m = \min_{[a,b]} |f'(x)|$$

(эта формула годится и для метода хорд).

В том случае, когда отрезок $[a, b]$ настолько мал, что на нем выполняется условие $M_2 < 2m_1$, где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$, а $m_1 = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$, точность приближения на n-м шаге оценивается следующим образом:

$$\text{если } |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \text{ то } |\xi - x_n| < \varepsilon^2.$$

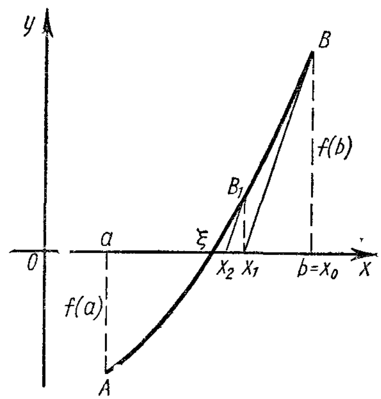


Рис. 3.22

Если производная $f'(x)$ мало изменяется на отрезке $[a, b]$, то для упрощения вычислений можно пользоваться формулой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \qquad (6)$$

т. е. значение производной в начальной точке достаточно вычислить только один раз. Геометрически это означает, что касательные в точках $B_n (x_n; f(x_n))$ заменяются прямыми, параллельными касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке $B_0 (x_0; f(x_0))$ (рис. 3.22).

Пример 1. Методом касательных уточнить до $\varepsilon = 0{,}001$ корень уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$, расположенный на отрезке $[-2{,}75; -2{,}5]$.

Решение. Ранее было установлено, что $f(-2{,}75) \cdot f''(x) > 0$ (см. пример 1 § 3.5). Поэтому, чтобы воспользоваться методом касательных, следует выбрать $x_0 = -2{,}75$. Вычисления будем вести по формуле (6). Находим

$$f'(x) = 3x^2 + 6x; \; f'(x_0) = f'(-2{,}75) = 6{,}1875.$$

Для удобства все вычисления сведем в следующую таблицу:

Таблица 36

n	x_n	x_n^3	x_n^2	$3x_n^2$	$f(x_n)$	$-\frac{f(x_n)}{6{,}1875}$
0	−2,75	−20,797	7,5625	22,6875	−1,111	0,179
1	−2,571	−16,994	6,6100	19,8300	−0,164	0,026
2	−2,545	−16,484	6,4770	19,431	−0,053	0,008
3	−2,537	−16,329	6,4364	19,309	0,020	0,003
4	−2,534	−16,271	6,4212	19,2636	0,007	0,001
5	−2,533					

Из табл. 3.6 видно, что $|x_5 - x_4| < 0{,}001$, поэтому $\xi = -2{,}533$.

Пример 2. Методом касательных уточнить до $\varepsilon = 0{,}0001$ корень уравнения $x - \sin x = 0{,}25$, расположенный на отрезке $[0{,}982; 1{,}178]$.

Решение. Здесь $a = 0{,}982$; $b = 1{,}178$. Находим $f'(x) = 1 - \cos x$; $f''(x) = \sin x > 0$ на $[0{,}982; 1{,}178]$; $f(1{,}178) \cdot f''(x) > 0$. Значит, $x_0 = 1{,}178$. Вычисления будем вести по формулам (1) и (2) и сведем их в табл. 3.7. Из табл. 3.7 видно, что $|x_3 - x_2| < 0{,}0001$. Таким образом, $\xi \approx 1{,}1712$.

Таблица 3.7

n	x_n	$-\sin x_n$	$f(x_n)=x_n-$ $-\sin x_n-0,25$	$f'(x_n)=$ $=1-\cos x_n$	$-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,178	—0,92384	0,00416	0,61723	—0,0065
1	1,1715	—0,92133	0,00017	0,61123	—0,0002
2	1,1713	—0,92127	0,00003	0,61110	—0,00005
3	1,17125				

§ 3.7. Комбинированный метод хорд и касательных

Методы хорд и касательных дают приближения корня с разных сторон. Поэтому их часто применяют в сочетании друг с другом, и уточнение корня происходит быстрее.

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, корень ξ отделен и находится на отрезке $[a, b]$. Применим *комбинированный метод хорд и касательных* с учетом типа графика функции.

Если $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то *метод хорд* дает приближения корня *с недостатком*, а *метод касательных — с избытком* (рис. 3.23, *а* и *б*).

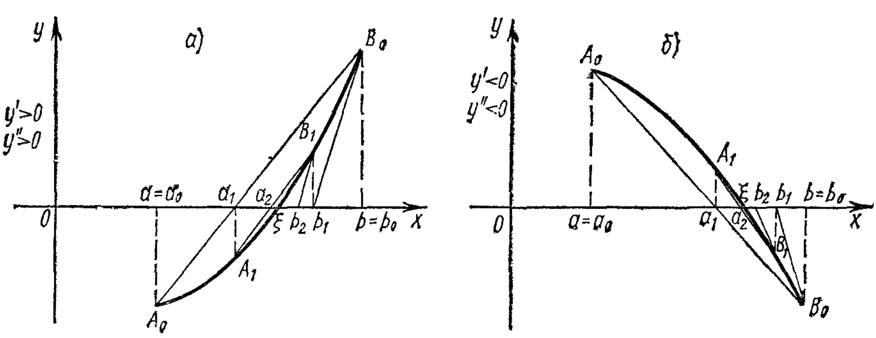


Рис. 3.23

Если же $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то *методом хорд* получаем значение корня *с избытком*, а *методом касательных — с недостатком* (рис. 3.24, *а* и *б*).

Однако во всех случаях истинный корень заключен между приближенными корнями, получающимися по методу хорд и методу касательных, т. е. выполняется неравенство $a < \overline{x}_n < \xi \leq \overline{\overline{x}}_n < b$, где $\overline{x}_n$ — приближенное значение корня с недостатком, $\overline{\overline{x}}_n$ — с избытком.

Вычисления следует вести в таком порядке. Если $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то со стороны конца a лежат приближенные значения корня, полученные по методу хорд, а со стороны конца b — значения, полученные по методу касательных, и тогда

$$a_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}, \quad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{1}$$

Теперь истинный корень находится на интервале $[a_1, b_1]$. Применяя к этому интервалу комбинированный метод, получаем

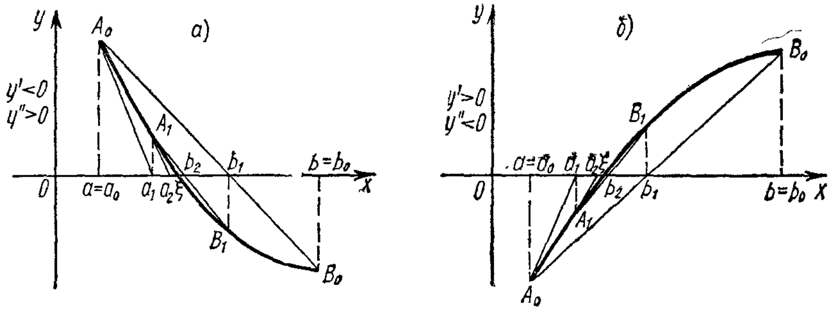


Рис. 3.24

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1-a_1)}{f(b_1)-f(a_1)}, \quad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}$$

и вообще

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)} \tag{2}$$

(см. рис. 3.23, *а* и *б*).

Если же $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то со стороны конца a лежат приближенные значения корня, полученные по методу касательных, а со стороны конца b — значения, полученные по методу хорд. Тогда

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}. \tag{3}$$

Применяя к отрезку $[a_1, b_1]$ комбинированный метод, получаем

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \quad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)(b_1-a_1)}{f(b_1)-f(a_1)}$$

и вообще

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}. \tag{4}$$

Комбинированный метод очень удобен при оценке погрешности вычислений. Процесс вычислений прекращается, как только станет выполняться неравенство $|\,\bar{\bar{x}}_n - \bar{x}_n\,| < \varepsilon$. За приближенное значение корня следует принять

$$\xi = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + \bar{\bar{x}}_n), \tag{5}$$

где $\bar{x}_n$ и $\bar{\bar{x}}_n$ — приближенные значения корня соответственно с недостатком и с избытком.

Пример. Комбинированным методом хорд и касательных уточнить до 0,001 корни уравнения $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$.

Решение. 1) Отделим корни аналитически. Имеем

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1,\ f'(x) = 3x^2 + 6x - 24,$$

т. е. корни производной $x_1 = -4$; $x_2 = 2$. Составим таблицу знаков функции:

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Данное уравнение имеет три действительных корня:

$$x_1 \in (-\infty, -4),\ x_2 \in (-4, 2),\ x_3 \in (2, +\infty).$$

Уменьшим промежутки нахождения корней до длины, равной 1:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Итак $x_1 \in (-7, -6)$, $x_2 \in (0, 1)$, $x_3 \in (3, 4)$.

2) Уточним комбинированным методом хорд и касательных корень, лежащий в интервале $(-7, -6)$. Имеем $f(-7) = -27 < 0$; $f(-6) = 37 > 0$ и

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 > 0$; $f''(x) = 6x + 24 < 0$; $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

Для расчетов применяем формулы (4):

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)},$$

т. е.

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n, \quad \text{где } \Delta a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)};$$

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n, \quad \text{где } \Delta b_n = -\frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

(a_n и b_n — приближенные значения корня соответственно с недостатком и с избытком). Здесь $a_0 = a = -7$, $b_0 = b = -6$.

Вычисления удобно вести в таблице (см. табл. 3.8 на стр. 134).

Следовательно, $\xi_1 \approx -6{,}639$.

3) Определим приближенный корень для интервала $(0,1)$. Имеем $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ и

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 < 0;\ f''(x) = 6x + 6 > 0;\ f'(x) \cdot f''(x) < 0.$$

Как и в первом случае, воспользуемся формулами (4) при $a_0 = a = 0$; $b_0 = b = 1$.

Составляем следующую таблицу (см. табл 3.9 на стр 134).

Таким образом, $\xi_2 \approx 0{,}042$.

4) Найдем приближенный корень из интервала (3, 4). Имеем $f(3) = -17 < 0$, $f(4) = 17 > 0$ и

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 > 0;\ f''(x) = 6x + 6 > 0;\ f'(x) \cdot f''(x) > 0.$$

Вычисления будем вести по формулам (2):

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)},$$

т. е.

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n, \quad \text{где } \Delta a_n = -\frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)};$$

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n, \quad \text{где } \Delta b_n = -\frac{f(b_n)}{f'(b_n)}.$$

Здесь $a_0 = a = 3$, $b_0 = b = 4$.

Вычисления сводим в таблицу (см. табл. 3.10).

Значит, $\xi_3 = 3{,}596$.

Таблица 3.8

n	a_n / b_n	$b_n - a_n$	a_n^2 / b_n^2	a_n^3 / b_n^3	$f(a_n)$ / $f(b_n)$	$f'(a_n)$	$f(b_n) - f(a_n)$	Δa_n / Δb_n	a_{n+1} / b_{n+1}
0	−7	1	49	−343	−27	81	64	0,333	−6,667
	−6		36	−216	37			−0,578	−6,578
1	−6,667	0,089	44,449	−296,34	−1,985	73,345	6,037	0,027	−6,640
	−6,578		43,270	−284,63	4,052			−0,060	−6,638
2	−6,640	0,002	44,090	−292,75	−1,12				
	−6,638		44,063	−292,49	0,011				

Таблица 3.9

n	a_n / b_n	$b_n - a_n$	a_n^2 / b_n^2	a_n^3 / b_n^3	$f(a_n)$ / $f(b_n)$	$f'(a_n)$	$f(b_n) - f(a_n)$	Δa_n / Δb_n	a_{n+1} / b_{n+1}
0	0	1	0	0	1	−24	−20	0,040	0,040
	1		1	1	−19			−0,95	0,050
1	0,040	0,01	0,0016	0,00006	0,045	−23,755	−0,147	0,002	0,042
	0,050		0,0025	0,00012	−0,102			−0,007	0,043
2	0,042	0,001	0,0016	0,00006	−0,0031				
	0,043		0,0017	0,00007	0,037				

Таблица 3.10

n	a_n / b_n	$b_n - a_n$	a_n^2 / b_n^2	a_n^3 / b_n^3	$f(a_n)$ / $f(b_n)$	$f'(b_n)$	$f(b_n)-f(a_n)$	Δa_n / Δb_n	a_{n+1} / b_{n+1}
0	3	1	9	27	−17	48	34	0,500	3,500
	4		16	64	17			−0,354	3,646
1	3,500	0,146	12,250	42,875	−3,375	37,755	5,217	0,092	3,592
	3,646		13,293	48,467	1,842			−0,041	3,605
2	3,592	0,013	12,903	46,346	−0,156	36,618	0,477	0,00039	3,5924
	3,605		12,996	46,851	0,319			−0,008	3,5963
3	3,5924	0,0039	12,906	46,362	−0,138	36,380	0,142	0,00382	3,59622
	3,5963		0,0039	12,934	0,004			−0,0001	3,5962
4	3,59622	0,00002							
	3,5962								

§ 3.8. Метод итерации (метод последовательных приближений)

Пусть задано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ — непрерывная функция. Требуется определить вещественный корень этого уравнения, заключенный на отрезке $[a, b]$.

Заменим уравнение $f(x) = 0$ равносильным ему уравнением

$$x = \varphi(x). \tag{1}$$

Выберем каким-либо способом $x_0 \in [a, b]$ и подставим его в правую часть уравнения (1); тогда получим $x_1 = \varphi(x_0)$. Затем это значение x_1 подставим снова в правую часть уравнения (1) и получим $x_2 = \varphi(x_1)$.

Повторяя этот процесс, получаем последовательность чисел $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Здесь могут встретиться два случая:

1) последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ сходится, т. е. имеет предел, и тогда этот предел будет корнем уравнения $f(x) = 0$;

2) последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ расходится, т. е. не имеет предела.

Приведем без доказательства теорему, выражающую условие, при котором итерационный процесс сходится.

Теорема. *Пусть на отрезке $[a, b]$ имеется единственный корень уравнения $x = \varphi(x)$ и во всех точках этого отрезка производная $f'(x)$ удовлетворяет неравенству $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$. Если при этом выполняется и условие $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$, то итерационный процесс сходится, а за нулевое приближение x_0 можно взять либо число из отрезка $[a, b]$.*

Последнее условие означает, что все приближения $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ также находятся на отрезке $[a, b]$. Чем меньше $|\varphi'(x)|$, тем лучше сходимость итерационного процесса.

Рассмотрим вопрос об определении точности вычисленных приближенных значений корня. Пусть ξ — точное значение корня уравнения $x = \varphi(x)$, а число q определяется из соотношения $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$. Тогда справедливо соотношение

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|. \tag{2}$$

Если поставить условие, что истинное значение корня ξ должно отличаться от приближенного значения на величину ε, т. е. $|\xi - x_n| \leqslant \varepsilon$, то приближения $x_0, x_1, \ldots, x_n$ надо вычислять до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon,$$

или

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{\varepsilon(1-q)}{q}. \tag{3}$$

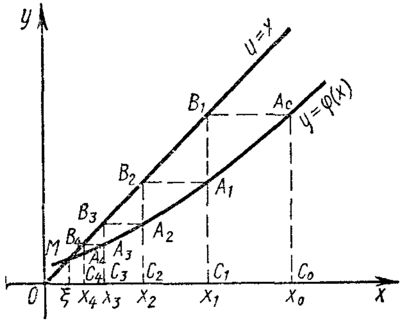


Рис. 3.25

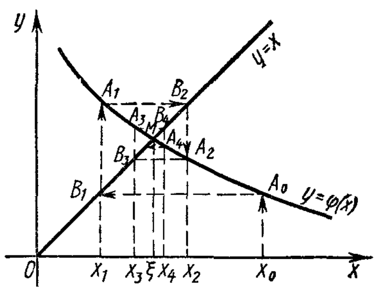


Рис. 3.26

Уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$ можно привести различными способами, однако для метода итерации следует взять то уравнение вида $x = \varphi(x)$, для которого выполняется условие приведенной выше теоремы.

Геометрическая интерпретация метода итерации. Пусть задано уравнение $f(x) = 0$ [$f(x)$ — непрерывная функция]. Приведем это уравнение к виду $x = \varphi(x)$ и построим графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Абсцисса точки пересечения графиков этих функций и является истинным корнем ξ (рис. 3.25).

Выберем $x_0 \in [a, b]$ и определим $\varphi(x_0)$. Условимся последовательность точек, лежащих на кривой $y = \varphi(x)$, обозначать через A_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$), а последовательность точек, лежащих на прямой $y = x$, — через B_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Из точки $A_0(x_0; \varphi(x_0))$ проведем прямую, параллельную оси Ox до пересечения с прямой $y = x$; тогда получим точку $B_1(x_1; \varphi(x_0))$.

Действительно, $A_0C_0 = \varphi(x_0) = B_1C_1$, так как $A_0B_1 \parallel OC_0$, $B_1C_1 \parallel A_0C_0$. Но $OC_1 = B_1C_1$ ($\Delta\ OC_1B_1$ — прямоугольный и равнобедренный, поскольку прямая $y = x$ есть биссектриса координатного угла). Следовательно, $x_1 = \varphi(x_0)$.

Проведем $A_1B_2 \parallel OC_1$ и, повторяя вышеизложенные рассуждения, убедимся в том, что $x_2 = \varphi(x_1)$.

На рис. 3.25 изображен сходящийся итерационный процесс. Кривая пересекает биссектрису $y = x$ в точке M с абсциссой ξ и при $x > \xi$ лежит под биссектрисой, а $\varphi'(x)$ удовлетворяет условию $0 < \varphi'(x) < 1$. Последовательные приближения $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ (общие абсциссы точек графиков обеих функций) м о н о т о н н о у б ы в а ю т. Каждое последующее приближение x_n ближе к истинному корню, чем каждое предыдущее x_{n-1}. Ломаная линия $A_0B_1A_1B_2A_2\ldots$ имеет вид «лестницы».

На рис. 3.26 производная $\varphi'(x) < 0$, но по абсолютной величине меньше единицы, т. е. $|\varphi'(x)| < 1$. Итерационный процесс сходится, но приближения к о л е б л ю т с я около точного значения корня. Ломаная линия $A_0B_1A_1B_2A_2\ldots$ имеет вид «спирали».

Итак, если в некоторой окрестности (a, b) корня ξ уравнения $x = \varphi(x)$ производная $\varphi'(x)$ сохраняет постоянный знак и выполнено неравенство $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$, причем $\varphi'(x) > 0$, то последовательные приближения $x_n = \varphi(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_0 \in [a, b]$ сходятся к корню монотонно. В том же случае, когда $\varphi'(x) < 0$, последовательные приближения колеблются около корня ξ.

На рис. 3.27 показан расходящийся итерационный процесс. Здесь $\varphi'(x) > 1$. Кривая пересекает биссектрису $y = x$ в точке M и при $x > \xi$ лежит над биссектрисой.

На рис. 3.28 показан расходящийся итерационный процесс для случая $|\varphi'(x)| > 1$. Последовательные «приближения» удаляются от точного значения корня ξ.

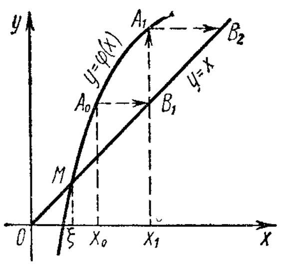


Рис. 3.27

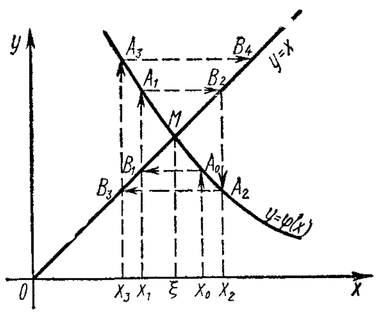


Рис. 3.28

Пример 1. Методом итерации уточнить до 10^{-4} корень уравнения $5x^3 - 20x + 3 = 0$, заключенный на отрезке $[0, 1]$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение следует привести к виду $x = \varphi(x)$. Это можно сделать несколькими способами, например:

1) $x = x + (5x^3 - 20x + 3)$, тогда $\varphi_1(x) = 5x^3 - 19x + 3$;

2) $x = \sqrt[3]{\dfrac{20x - 3}{5}}$, тогда $\varphi_2(x) = \sqrt[3]{\dfrac{20x - 3}{5}}$;

3) $x = \dfrac{5x^3 + 3}{20}$, тогда $\varphi_3(x) = \dfrac{5x^3 + 3}{20}$.

Определим, какой из полученных функций $\varphi(x)$ следует воспользоваться для вычисления последовательных приближений. Вспомним, что если $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$, то итерационный процесс сходится. Находим

$$|\varphi_1'(x)| = |15x^2 - 19| > 1 \text{ [на } 0, 1];$$

$$|\varphi_3'(x)| = \left|\frac{15x^2}{20}\right| = \frac{3}{4}x^2 < 1 \text{ на } [0, 1].$$

Следовательно, можно воспользоваться функцией $\varphi_3(x)$ и искать последовательные приближения методом итерации по формуле

$$x_n = \frac{5x_{n-1}^3 + 3}{20}.$$

За начальное приближение возьмем $\max \varphi'(x)$ на $[0, 1]$, т. е. $x_0 = 0{,}75$. Пользуясь формулой (3), определим, какой должна быть разность между двумя последовательными приближениями, для того чтобы заданная точность была достигнута:

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{0{,}0001 \cdot (1 - 0{,}75)}{0{,}75} = \frac{0{,}0001 \cdot 0{,}25}{0{,}75} = 0{,}00003.$$

Таким образом, когда абсолютная величина разности $|x_n - x_{n-1}|$ не превзойдет 0,00003, итерационный процесс следует прекратить и считать, что заданная точность достигнута.

Вычисления удобно вести с помощью следующей таблицы:

Таблица 3.11

n	x_n	x_n^3	$\varphi(x_n) = x_{n+1}$
0	0,75	0,42188	0,25547
1	0,2555	0,016777	0,154144
2	0,1541	0,005652	0,151413
3	0,1514	0,005443	0,151361
4	0,15136	0,005442	0,151361

На этом итерационный процесс можно остановить и считать $\xi \approx 0{,}1514$.

Пример 2. Вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-5}$ корень уравнения $e^x - x^2 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $e^x = x^2$ и отделим корни графически. Построим графики функций $y = e^x$ и $y = x^2$ (рис. 3.29). Из чертежа видно, что уравнение $e^x - x^2 = 0$ имеет один действительный корень, который лежит в интервале $[-0{,}8; -0{,}7]$.

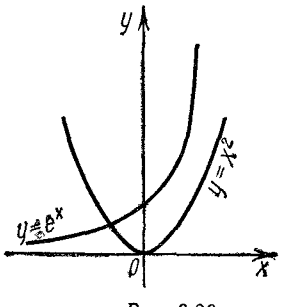


Рис. 3.29

Проверим, действительно ли это так. Определим $f(-0{,}8)$ и $f(-0{,}7)$: $f(-0{,}8) = 0{,}44933 - 0{,}64 = -0{,}19067 < 0$; $f(-0{,}7) = 0{,}49659 - 0{,}49 = 0{,}00659 > 0$. Так как знаки функции $f(x) = e^x - x^2$ на концах отрезка $[-0{,}8; -0{,}7]$ различны, то внутри этого отрезка содержится корень уравнения.

Попробуем сузить интервал, применив метод проб. Находим $f(-0{,}75) = 0{,}49237-0{,}56250 < 0$, но $f(-0{,}7) > 0$; значит, корень находится на отрезке $[-0{,}75; -0{,}7]$. Сузим этот отрезок еще раз. Имеем $f(-0{,}725) = 0{,}48432-0{,}52562 = -0{,}04130 < 0$. Но $f(-0{,}7)>0$. Следовательно, корень находится на отрезке $[-0{,}725; -0{,}7]$.

Из уравнения $e^x = x^2$ определяем, что $x = -\sqrt{e^x}$. (Перед радикалом берем знак минус, так как нам известно, что корень отрицателен.) Перепишем это уравнение в виде $x = -e^{x/2}$ и проверим, каким будет итерационный процесс: сходящимся или расходящимся, т. е. выполняется ли неравенство $|\varphi'(x)| < 1$. В нашем примере

$$\varphi(x) = -e^{x/2}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2},$$

$$|\varphi'(-0{,}725)| = 0{,}34727; \quad |\varphi'(-0{,}7)| = 0{,}35230.$$

Поскольку $|\varphi'(x)| < 1$, итерационный процесс сходится. Число q в формуле (3) возьмем равным 0,36. Так как $\varepsilon = 10^{-5}$, то

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{0{,}00001\,(1-0{,}36)}{0{,}36} = 0{,}000018.$$

Таким образом, требуемая точность будет достигнута, если выполняется неравенство $|x_n - x_{n-1}| \leqslant 0{,}00002$. За нулевое приближение можно принять любой из концов отрезка $[-0{,}725; -0{,}7]$ и любую точку внутри его. Примем $x_0 = -0{,}7$.

Вычисления сведем в следующую таблицу:

Таблица 3.12

n	x_n	$\frac{x_n}{2}$	$e^{x_n/2}$
0	−0,7	−0,35	−0,70460
1	−0,70460	−0,35230	−0,70307
2	−0,70307	−0,35154	−0,70360
3	−0,70360	−0,35180	−0,70342
4	−0,70342	−0,35171	−0,70348
5	−0,70348	−0,35174	−0,70346
6	−0,70346		

Так как $|x_6 - x_5| = |-0{,}70348 - (-0{,}70346)| = 0{,}00002$, то требуемая точность вычислений достигнута и $\xi \approx 0{,}70346$.

§ 3.9. Приближенное решение систем уравнений. Метод Ньютона для системы двух уравнений

В данном параграфе рассматривается решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными *методом Ньютона*. Пусть дана система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где f и φ — непрерывно дифференцируемые функции. Предположим что известны n-е приближения неизвестных, тогда за более точные их значения можно принять

$$x = x_n + h_n,\ y = y_n + k_n.$$

Тогда система (1) запишется в виде

$$\begin{cases} f(x_n + h_n,\ y_n + k_n) = 0, \\ \varphi(x_n + h_n,\ y_n + k_n) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Разложим функции f и φ в ряд Тейлора по степеням h_n и k_n:

$$f(x_n + h_n,\ y_n + k_n) = f(x_n,\ y_n) + h_n f'_x(x_n,\ y_n) + k_n f'_y(x_n,\ y_n) + \\ + O_1(h_n,\ k_n),$$

$$\varphi(x_n + h_n,\ y_n + k_n) = \varphi(x_n,\ y_n) + h_n \varphi'_x(x_n,\ y_n) + k_n \varphi'_y(x_n,\ y_n) + \\ + O_2(h_n,\ k_n).$$

Здесь $O_1(h_n,\ k_n)$ и $O_2(h_n,\ k_n)$ содержат члены более высокого порядка малости, нежели h_n и k_n. Ограничиваясь в последней системе линейными членами относительно h_n и k_n, получим

$$\begin{cases} f(x_n,\ y_n) + h_n f'_x(x_n,\ y_n) + k_n f'_y(x_n,\ y_n) = 0, \\ \varphi(x_n,\ y_n) + h_n \varphi'_x(x_n,\ y_n) + k_n \varphi'_y(x_n,\ y_n) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

или

$$\begin{cases} h_n f'_x(x_n,\ y_n) + k_n f'_y(x_n,\ y_n) = -f(x_n,\ y_n), \\ h_n \varphi'_x(x_n,\ y_n) + k_n \varphi'_y(x_n,\ y_n) = -\varphi(x_n,\ y_n), \end{cases} \tag{4}$$

откуда

$$h_n = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_n,\ y_n) & f'_y(x_n,\ y_n) \\ -\varphi(x_n,\ y_n) & \varphi'_y(x_n,\ y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_n,\ y_n) & f'_y(x_n,\ y_n) \\ \varphi'_x(x_n,\ y_n) & \varphi'_y(x_n,\ y_n) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta h_n}{\Delta_n}, \tag{5}$$

$$k_n = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_n,\ y_n) & -f(x_n,\ y_n) \\ \varphi'_x(x_n,\ y_n) & -\varphi(x_n,\ y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_n,\ y_n) & f'_y(x_n,\ y_n) \\ \varphi'_x(x_n,\ y_n) & \varphi'_y(x_n,\ y_n) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta k_n}{\Delta_n}. \tag{6}$$

Таким образом, находим

$$x_{n+1} = x_n + h_n,\ y_{n+1} = y_n + k_n. \tag{7}$$

Исходные значения x_0, y_0 определяются приближенно, обычно из графического решения.

Пример. Методом Ньютона решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 6y - 4 = 0, \\ x^2 - 3y^2 + 4x - 2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Система имеет два решения. Уточним одно из них, принадлежащее области $0{,}5 < x < 0{,}6$; $-0{,}48 < y < -0{,}44$. (Корни ранее были отделены графически; см. § 3.2, пример 5.)

Таблица 3.13

n	x_n / y_n	x_n^2 / $3y_n^2$	$2x_n^2$ / $3y_n^2-6y_n-4$	$x_n^2+4x_n$ / $-3y_n^2-2$	$f(x_n, y_n)$ / $\varphi(x_n, y_n)$	$f'_x(x_n, y_n)$ / $\varphi'_x(x_n, y_n)$	$f'_y(x_n, y_n)$ / $\varphi'_y(x_n, y_n)$	Δ_n	Δh_n / Δk_n	h_n / k_n
0	0,5	0,25	0,50	2,25	—0,1052	2	—8,76	48,32	3,6612	0,0749
	—0,46	0,6348	—0,6052	—2,6348	—0,3848	5	2,76		0,2436	0,0050
1	0,5749	0,3306	0,6612	2,6302	0,0222	2,2996	—8,7300	51,2357	—0,1409	—0,0027
	—0,4550	0,6210	—0,6490	—2,6210	0,0092	5,1498	2,7300		1,1221	0,021
2	0,5722	0,3272	0,6544	2,6160	—0,1864	2,2888	—8,6040	50,2224	0,0483	0,0009
	—0,4340	0 5652	—0,8308	—2,5652	0,0508	5,1444	2,6040		—1,9751	0,039
3	0,5731	0,3283	0,6566	2,6207	0,1666	2,2924	—8,8380	52,0079	—0,0374	—0,0007
	—0,4730	0,6711	—0,4900	—2,6711	—0,0504	5,1462	2,8380		0,9728	0,0180
4	0,5724	0,3272	0,6544	2,6160	0,0054	2,2896	—8,73	51,1647	0,0290	0,0005
	—0,4550	0,6210	—0,6490	—2,6210	—0,0050	5,1448	2,73		0,0492	0,0009
5	0,5729									
	—0,4541									

За начальное приближение примем $x_0 = 0,5$; $y_0 = -0,46$. Далее, находим

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 6y - 4, \quad \varphi(x, y) = x^2 + 4x - 3y^2 - 2i$$

$$f'_x = 4x; \quad f'_y = 6y - 6, \quad \varphi'_x = 2x + 4; \quad \varphi'_y = -6y.$$

Вычисления удобно вести с помощью таблицы (см. табл. 3.13 на стр. 141). Окончательный ответ: $x \approx 0,573$; $y \approx -0,454$.

§ 3.10. Метод итерации для нелинейной системы уравнений

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Требуется найти действительные решения с заданной степенью точности.

Перепишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y), \\ y = \varphi_2(x, y). \end{cases} \tag{2}$$

Пусть x_0 и y_0 — начальные приближения корней, полученные графически или каким-либо другим способом. Подставив в правые части уравнений системы (2) вместо x и y начальные значения x_0 и y_0, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_0, y_0), \\ y_1 &= \varphi_2(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично получаем вторые приближения

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi_1(x_1, y_1), \\ y_2 &= \varphi_2(x_2, y_2). \end{aligned} \tag{4}$$

В общем случае

$$\begin{aligned} x_n &= \varphi_1(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n &= \varphi_2(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

Если функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ непрерывны и последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ сходятся, то пределы их дают решение системы (2), а следовательно, и системы (1).

Приведем без доказательства теорему об условиях сходимости итерационного процесса.

Теорема. *Пусть в некоторой замкнутой окрестности R $(a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B)$ имеется одно и только одно решение $x = \bar{x}$ и $y = \bar{y}$ системы (2).*

Тогда если:

1) *функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в R;*

2) *начальные приближения x_0, y_0 и все последующие приближения x_n, y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат R;*

3) *в R выполнены неравенства*

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|\leqslant q_1<1,$$
$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|\leqslant q_2<1 \tag{6}$$

или неравенства

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|\leqslant q_1<1,$$
$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|\leqslant q_2<1, \tag{7}$$

то процесс последовательных приближений сходится к решению

$$x=\bar{x},\ y=\bar{y}.$$

Оценка погрешности n-го приближения определяется неравенством

$$|\bar{x}-x_n|+|\bar{y}-y_n|\leqslant\frac{M}{1-M}(|x_n-x_{n-1}|+|y_n-y_{n-1}|), \tag{8}$$

где M — наибольшее из чисел q_1 и q_2, входящих в неравенства (6) или (7).

Сходимость метода итерации считается хорошей, если $M<{}^1/_2$; при этом $M/(1-M)<1$. Поэтому если в двух последовательных приближениях совпадают, например, три десятичных знака после запятой, то ошибка последнего приближения не превосходит 0,001.

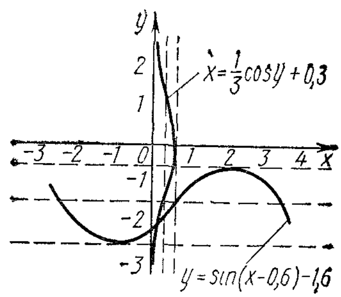


Рис 3 30

Пример 1 Методом итерации решить систему

$$\begin{cases}\sin(x-0{,}6)-y=1{,}6,\\ 3x-\cos y=0{,}9\end{cases} \tag{А}$$

с точностью до $\varepsilon=0{,}001$.

Решение. Приведем систему к виду

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\cos y+0{,}3\equiv\varphi_1(x,y),\\ y=\sin(x-0{,}6)-1{,}6\equiv\varphi_2(x,y).\end{cases} \tag{Б}$$

Отделим корни графически (рис. 3.30) Из графика видим, что система (Б) имеет единственное решение, заключенное в области $0<x<0{,}3$, $-2{,}2<y<-1{,}8$.

Проверим систему (Б) на сходимость итерационного процесса:

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|=0;\quad\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|=|\cos(x-0{,}6)|<|\cos 0{,}3|=0{,}2955<1;$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|=\left|-\frac{1}{3}\sin y\right|<\left|-\frac{1}{3}\sin(-1{,}8)\right|=0{,}3246<1;\quad\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|=0.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|<1,\quad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|<1.$$

Условия сходимости выполняются. Последовательные приближения найдем по формулам

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\cos y_n+0,3,$$

$$y_{n+1}=\sin(x_n-0,6)-1,6.$$

Выберем $x_0=0,15$, $y_0=-2$.

Вычисления удобно вести с помощью следующей таблицы:

Таблица 3.14

n	x_n	y_n	$x_n-0,6$	$\sin(x_n-0,6)$	$\cos y_n$	$\frac{1}{3}\cos y_n$
0	0,15	−2	−0,45	−0,4350	−0,4161	−0,1384
1	0,1616	−2,035	−0,4384	−0,4245	−0,4477	−0,1492
2	0,1508	−2,0245	−0,4492	−0,4342	−0,4382	−0,1461
3	0,1539	−2,0342	−0,4461	−0,4313	−0,4470	−0,1490
4	0,1510	−2,0313	−0,4490	−0,4341	−0,4444	−0,1481
5	0,1519	−2,0341	−0,4481	−0,4333	−0,4469	−0,1490
6	0,1510	−2,0333	−0,4490	−0,4341	−0,4461	−0,1487
7	0,1513	−2,0341	−0,4487	−0,4340	−0,4469	−0,1490
8	0,1510	−2,0340				

Таким образом, $x\approx 0,151$; $y\approx -2,034$.

§ 3.11. Общие свойства алгебраических уравнений. Определение числа действительных корней алгебраического уравнения

Общие свойства алгебраических уравнений. Запишем алгебраическое уравнение n-й степени

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (1)$$

где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени, n — наивысшая степень при неизвестном, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные коэффициенты.

Всякое число ξ, обращающее многочлен в нуль, т. е. такое, что $P_n(\xi)=0$, называется *корнем* многочлена. Согласно основной теореме алгебры, многочлен $P_n(x)$ степени n $(n\geqslant 1)$ с любыми числовыми коэффициентами имеет n корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность.

Число ξ *является корнем многочлена* $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда $P_n(x)$ делится без остатка на $x-\xi$. Если при этом $P_n(x)$ делится без остатка на $(x-\xi)^k$ $(k\geqslant 1)$, но уже не делится на $(x-\xi)^{k+1}$, то ξ называется *k-кратным корнем* (или *корнем кратности k*) многочлена $P_n(x)$. Корни кратности $k=1$ называются *простыми корнями* многочлена.

Корни алгебраического уравнения (1) могут быть как действительными, так и комплексными.

Комплексные корни уравнения (1) обладают свойством *парной сопряженности*, т. е. если уравнение (1) имеет комплексный корень $\xi = \alpha + \beta i$ (где α и β — действительные числа) кратности k, то оно имеет и комплексный корень $\bar{\xi} = \alpha - \beta i$ также кратности k. Модули этих корней одинаковы:

$$|\xi| = |\bar{\xi}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Если уравнение (1) имеет комплексные корни, то их число — четное. Поэтому всякое алгебраическое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

Прежде чем вычислять корни алгебраического уравнения, сначала необходимо: а) *определить число корней, которое имеет данное уравнение*; б) *найти область существования корней* (*установить верхнюю и нижнюю границу расположения корней*). После этого можно приступать к отделению корней и их уточнению.

Определение числа действительных корней алгебраических уравнений. Определить приближенно число действительных положительных корней алгебраического уравнения (1)

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

можно с помощью п р а в и л а Д е к а р т а: *количество действительных положительных корней алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ с действительными коэффициентами (подсчитываемых каждый столько раз, какова его кратность) либо равно числу перемен знака в последовательности коэффициентов уравнения $P_n(x) = 0$, либо на четное число меньше (равные нулю коэффициенты не учитываются).*

Количество отрицательных корней уравнения равно числу перемен знака в последовательности коэффициентов $P_n(-x)$ или на четное число меньше.

Если уравнение п о л н о е, то количество его положительных корней равно числу перемен знака в последовательности коэффициентов или на четное число меньше, а количество отрицательных корней — числу постоянств знака или на четное число меньше.

Пример 1. Определить количество положительных и отрицательных корней уравнения

$$x^5 - 17x^4 + 12x^3 + 7x^2 - x + 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Согласно основной теореме алгебры это уравнение имеет пять корней (из них хотя бы один является действительным).

Уравнение является полным, последовательность знаков коэффициентов уравнения такова: $+, -, +, +, -, +$. Знак изменяется четыре раза; значит, положительных корней будет либо 4, либо 2, либо ни одного.

Число постоянств знака равно 1; следовательно, заданное уравнение имеет один отрицательный корень.

Пример 2. Определить количество действительных положительных и отрицательных корней уравнения

$$x^6 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение имеет шесть корней; последовательность знаков: $+, -, +, +, -$. Имеет место три перемены знака; следовательно, положительных корней либо 3, либо 1. Далее, для многочлена

$$P_n(-x) = x^6 - 3x^4 - x^3 + x^2 - 1$$

последовательность знаков такова: $+, -, -, +, -$. Здесь также имеем три перемены знака — поэтому отрицательных корней либо 3, либо 1.

Более точно число корней алгебраического уравнения можно определить при помощи п р а в и л а Ш т у р м а, заключающегося в следующем.

Пусть для данного алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ каким-либо способом установлено, что все его действительные корни находятся в интервале (a, b) (a и b — действительные числа и не являются корнями уравнения, $a < b$). Найдем первую производную $P_n'(x)$ и разделим на нее многочлен $P_n(x)$. Остаток от деления $P_n(x)$ на $P_n'(x)$ возьмем с противоположным знаком и обозначим его через $R_1(x)$.

Затем точно так же делим $P_n'(x)$ на $R_1(x)$, полученный остаток берем с противоположным знаком и обозначим через $R_2(x)$. Разделив $R_1(x)$ на $R_2(x)$ и снова взяв остаток с противоположным знаком, получим $R_3(x)$. Процесс деления продолжаем до тех пор, пока не будет получен остаток, являющийся постоянной величиной. Эту величину также берем с противоположным знаком.

Получаем последовательность функций

$$P_n(x),\quad P_n'(x),\quad R_1(x),\quad R_2(x), \ldots,\quad R_{m-1}(x),\quad R_m = \text{const}.$$

В эту последовательность подставляем вместо x сначала a, затем b и подсчитываем числа перемен знака в обоих случаях [обозначим полученные числа соответственно через $W(a)$ и $W(b)$]. Тогда $W(a) \geqslant W(b)$, и *разность* $W(a) - W(b)$ в точности *равна количеству действительных корней уравнения* $P_n(x)$, *заключенных между* a *и* b.

При помощи правила Штурма можно определить число отрицательных корней уравнения $P_n(x) = 0$ [т. е. определить количество действительных корней уравнения $P_n(x) = 0$ в интервале $(-\infty, 0)$], а также число положительных корней [в интервале $(0, +\infty)$]. Правило Штурма применяется также для отделения корней. Функции, входящие в систему Штурма, можно умножать и делить на произвольные положительные числа. Это значительно упрощает работу, когда производится деление с остатком.

Пример 3. Определить количество действительных корней уравнения $5x^3 - 20x + 3 = 0$, а также отделить эти корни, пользуясь правилом Штурма.

Р е ш е н и е. Составляем систему функций Штурма. Имеем

$$P_n(x) = 5x^3 - 20x + 3,\quad P_n'(x) = 15x^2 - 20.$$

Для определения $R_1(x)$ умножим $P_n(x)$ на 3 и затем разделим на $P_n'(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 15x^3 - 60x + 9 & 15x^2 - 20 \\ \cline{2-2} \mp 15x^3 \pm 20x & x \\ \hline -40x + 9 & \end{array}$$

Значит, $R_1(x) = 40x - 9$ (остаток взяли с противоположным знаком). Умножим $P_n'(x)$ на 8 и разделим это произведение на $R_1(x)$:

$$
\begin{array}{r|l}
120x^2-160 & 40x-9 \\
\cline{2-2}
\mp 120x^2 \pm 27x & 3x+27 \\
\cline{1-1}
40\,(27x-160) & \\
\cline{1-1}
40\cdot 27x-40\cdot 160 & \\
\mp 40\cdot 27x \pm 9\cdot 27 & \\
\cline{1-1}
- &
\end{array}
$$

Поскольку последний остаток является постоянным числом со знаком « — » (а нас в этом случае интересует именно знак постоянного остатка), меняем его на противоположный, т. е. на « + ».

Составляем следующую таблицу знаков функций, входящих в систему Штурма:

x	$P_n(x)$	$P_n'(x)$	$R_1(x)$	R_2	$W(x)$
$-\infty$	−	+	−	+	3
0	+	−	−	+	2
$+\infty$	+	+	+	+	0

Из таблицы видно, что в интервале $(-\infty, +\infty)$ содержатся три действительных корня [так как $W(-\infty) - W(+\infty) = 3-0 = 3$]. Из них один является отрицательным [$W(-\infty) - W(0) = 3-2 = 1$], а два — положительными [$W(0) - W(+\infty) = 2-0 = 2$].

Отделим корни по правилу Штурма, сократив интервалы до длины, равной 1:

x	$P_n(x)$	$P_n'(x)$	$R_1(x)$	R_2	$W(x)$
$-\infty$	−	+	−	+	3
−3	−	+	−	+	3
−2	+	+	−	+	2
−1	+	−	+	+	2
0	+	−	−	+	2
1	−	−	+	+	1
2	+	+	+	+	0

Из последней таблицы видно, что корни расположены в интервалах $(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

§ 3.12. Нахождение области существования корней алгебраического уравнения

Правило кольца. *Пусть дано алгебраическое уравнение*

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные коэффициенты, и пусть

$$A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}, \quad B = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}.$$

Тогда корни уравнения заключены в круговом кольце $r < |x| < R$, где

$$r = \frac{1}{1 + B/|a_n|}; \quad R = 1 + \frac{A}{|a_0|}.$$

При этом r — нижняя, а R — верхняя граница положительных корней алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$, и $-R$, $-r$ соответственно нижняя и верхняя граница отрицательных корней.

Пример 1. Определить границы корней уравнения $5x^3 - 20x + 3 = 0$.

Решение. Здесь $|a_0| = 5$, $A = 20$, $|a_n| = 3$, $B = 20$, т. е.

$$R = 1 + \frac{A}{|a_0|} = 1 + \frac{20}{5} = 5;$$

$$r = \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_n|}} = \frac{1}{1 + \frac{20}{3}} = \frac{3}{23} \approx 0{,}013.$$

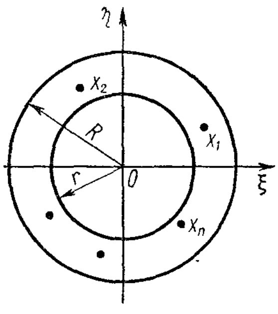


Рис. 3.31

Тогда, если действительные корни уравнения $5x^3 - 20x + 3 = 0$ существуют (а они обязательно существуют, так как уравнение нечетной степени), то они расположены в интервале $(-5, 5)$; при этом отрицательные корни лежат в интервале $(-5; -0{,}013)$, а положительные — в интервале $(0{,}013; 5)$.

При решении уравнений удобно сначала установить границы корней, а потом уже применять правило Штурма. По правилу кольца эти границы определяются весьма приближенно.

Укажем прием более точного определения границ действительных корней алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$.

Если R_1 — верхняя граница положительных корней $P_n(x)$, R_2 — верхняя граница положительных корней $P_n(-x)$, $R_3 > 0$ — верхняя граница положительных корней $x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ и R_4 — верхняя граница положительных корней $x^n P_n\left(-\frac{1}{x}\right)$, то все отличные от нуля действительные корни уравнения $P_n(x) = 0$ (если они существуют) лежат внутри интервалов $\left(-R_2, -\frac{1}{R_4}\right)$ и $\left(\frac{1}{R_3}, R_1\right)$.

Для определения верхней границы положительных корней алгебраического уравнения можно воспользоваться методами Лагранжа или Ньютона.

Метод Лагранжа. *Если коэффициенты многочлена*

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

удовлетворяют условиям $a_0 > 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1} \geqslant 0$, $a_m < 0$, то верхняя граница положительных корней уравнения $P_n(x) = 0$ находится по формуле

$$R = 1 + \sqrt[m]{\frac{B}{a_0}},$$

где B — наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов $P_n(x)$.

Пример 2. Методом Лагранжа определить границы положительных и отрицательных корней уравнения $8x^4 - 8x^2 - 32x + 1 = 0$.

Решение. Здесь $a_0 = 8 > 0$; $a_1 = 0$; $a_2 = -8 < 0$; $a_3 = -32$, $a_4 = 1$, $m = 2$ (номер первого из отрицательных коэффициентов), $B = 32$. Следовательно, $R_1 = 1 + \sqrt{32/8} = 3$.

Рассмотрим многочлен

$$P_n(-x) = 8x^4 - 8x^2 + 32x + 1.$$

Аналогичным образом находим, что для него верхней границей положительных корней служит $R_2 = 1 + \sqrt{8/8} = 2$.

Далее, для многочлена

$$x^4 P_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 - 32x^3 - 8x^2 + 8$$

имеем $a_0 = 1 > 0$, $a_1 = -32 < 0$, т. е. $m = 1$, $B = 32$, и значит, $R_3 = 1 + 32 = 33$.

Наконец, для многочлена

$$x^4 P_n\left(-\frac{1}{x}\right) = x^4 + 32x^3 - 8x^2 + 8$$

имеем $a_0 = 1 > 0$; $a_1 = 32$; $a_2 = -8$, $a_3 = 0$, $a_4 = 8$, т. е. $m = 2$, $B = 8$. Поэтому $R_4 = 1 + \sqrt{8} = 1 + 2\sqrt{2} = 3{,}828$.

Следовательно, если уравнение $8x^4 - 8x^2 - 32x + 1 = 0$ имеет действительные корни, то они обязательно лежат в интервалах $(-2;\ -1/3{,}828)$ и $(1/33;\ 3)$.

Метод Ньютона. *Если при $x = c$ многочлен*

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

и его производные $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, ... принимают положительные значения, то c является верхней границей положительных корней уравнения $P_n(x) = 0$.

Пример 3. Методом Ньютона определить верхнюю границу положительных корней уравнения $8x^4 - 8x^2 - 32x + 1 = 0$.

Решение. Находим

$$P(x) = 8x^4 - 8x^2 - 32x + 1; \quad P'(x) = 32x^3 - 16x - 32;$$

$$P''(x) = 96x^2 - 16; \quad P'''(x) = 192x; \quad P^{IV}(x) = 192.$$

Проверке подлежат только значения $x > 0$. При $x = c = 1$ имеем $P(1) < 0$. Значит, проводить далее проверку для $x = 1$ не следует. Проверим $x = c = 2$:

$$P(2) > 0, \quad P'(2) > 0, \quad P''(2) > 0, \quad P'''(2) > 0, \quad P^{IV} > 0.$$

Таким образом, верхней границей положительных корней является число 2, т. е. $R = 2$. В качестве нижней границы можно взять число, обратное R, т. е. $r = 1/2$.

§ 3.13. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

Вычисление значений многочлена. Пусть дано алгебраическое уравнение

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Как известно, корнем уравнения $P_n(x) = 0$ называется такое значение неизвестного x, которое обращает многочлен $P_n(x)$ в нуль. Поэтому существенное значение приобретает вопрос о вычислении значения многочлена. Вычислить значение многочлена $P_n(x)$ при $x = \xi$ можно непосредственной подстановкой ξ в многочлен $P_n(x)$, т. е. нужно найти

$$P_n(\xi) = a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \xi + a_n.$$

Если при этом $P_n(\xi) = 0$, то ξ — корень уравнения $P_n(x) = 0$. Вычисление значения многочлена тесно связано с вопросом о делимости многочлена на линейный двучлен (многочлен первой степени). Если разделить многочлен $P_n(x)$ на линейный двучлен, то остаток будет либо некоторым многочленом нулевой степени, либо нулем, т. е. некоторым числом r. Следующая теорема позволяет найти этот остаток, не выполняя самого деления, когда производится деление на многочлен вида $x - \xi$.

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - \xi$ равен значению этого многочлена при $x = \xi$.*

Доказательство. Пусть

$$P_n(x) = (x - \xi)\, g(x) + r,$$

где $g(x)$ — многочлен степени на единицу меньшей, чем $P_n(x)$. Найдем значение $P_n(x)$ при $x = \xi$:

$$P_n(\xi) = (\xi - \xi)\, g(\xi) + r = r,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Число ξ является корнем многочлена $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен без остатка делится на двучлен $x - \xi$.*

Если многочлен $P_n(x)$ делится на некоторый многочлен первой степени $ax + b$, то он делится, очевидно, и на многочлен $[x - (-b/a)]$, т. е. на многочлен вида $x - \xi$. Следовательно, разыскание корней многочлена $P_n(x)$ равносильно разысканию его линейных делителей.

Пример 1. Определить остаток от деления многочлена

$$P(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$$

на двучлен $x - 3$.

Решение. По теореме Безу находим

$$P(3) = 3^5 + 3 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 3 + 1 =$$
$$= 243 + 243 - 54 + 9 - 3 + 1 = 439.$$

Попробуем решить этот пример непосредственным делением на $x - 3$ Деление будем производить «углом»:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+3x^4-2x^3+x^2-x+1 & x-3 \\
\cline{2-2}
\mp x^5 \pm 3x^4 & x^4+6x^3+16x^2+49x+146. \\
\quad 6x^4-2x^3 & \\
\quad \mp 6x^4 \pm 18x^2 & \\
\qquad 16x^3+x^2 & \\
\qquad \mp 16x^3 \pm 48x^2 & \\
\qquad\quad 49x^2-x & \\
\qquad\quad \mp 49x^2 \pm 147x & \\
\qquad\qquad 146x+1 & \\
\qquad\qquad \mp 146x \pm 438 & \\
\qquad\qquad\quad 439=r &
\end{array}
$$

Итак, остаток $r = 439$, а частное $g(x) = x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 49x + 146$ есть многочлен степени на единицу ниже, чем заданный многочлен $P_n(x)$.

Рассмотрим более простой метод деления многочлена $P_n(x)$ на линейный двучлен $x - \xi$.

Схема Горнера. Представим многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

в виде

$$P_n(x) = (x - \xi)\, g(x) + b_n,$$

где

$$g(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-1},$$

т. е.

$$P_n(x) \equiv (x - \xi)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-1}) + b_n.$$

Раскрывая скобки в последнем равенстве, имеем

$$\begin{gathered}
a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = \\
= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} - b_0 \xi x^{n-1} + b_2 x^{n-2} - b_1 \xi x^{n-2} + b_3 x^{n-3} - b_2 \xi x^{n-3} + \dots \\
\dots + b_{n-1} x - b_{n-2} \xi x + b_n - b_{n-1} \xi.
\end{gathered}$$

После приведения подобных членов получим

$$\begin{gathered}
a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} x + a_n = \\
= b_0 x^n + (b_1 - b_0 \xi) x^{n-1} + (b_2 - b_1 \xi) x^{n-2} + (b_3 - b_2 \xi) x^{n-3} + \dots \\
\dots + (b_{n-1} - b_{n-2} \xi) x + (b_n - b_{n-1} \xi).
\end{gathered}$$

В левой и правой частях последнего равенства находятся многочлены от переменной x. Известно, что два многочлена считаются равными, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного x. Поэтому:

$$
\begin{array}{lcl}
a_0 = b_0, & & b_0 = a_0, \\
a_1 = b_1 - b_0\xi, & & b_1 = b_0\xi + a_1, \\
a_2 = b_2 - b_1\xi, & & b_2 = b_1\xi + a_2, \\
a_3 = b_3 - b_2\xi, & \text{или} & b_3 = b_2\xi + a_3, \\
a_4 = b_4 - b_3\xi, & & b_4 = b_3\xi + a_4, \\
\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\
a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}\xi, & & b_{n-1} = b_{n-2}\xi + a_{n-1}, \\
a_n = b_n - b_{n-1}\xi, & & b_n = b_{n-1}\xi + a_n = r = P(\xi).
\end{array}
$$

Как видно из последних равенств, каждый последующий коэффициент b_i получается умножением предыдущего b_{i-1} на ξ и прибавлением соответствующего коэффициента a_i; так же находится и остаток r.

Вычисления удобно располагать по следующей схеме (называемой *схемой Горнера*):

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{n-1}	a_n
ξ	$\vdots$	$b_0\xi$	$b_1\xi$	$b_2\xi$	$b_3\xi$	...	$b_{n-2}\xi$	$b_{n-1}\xi$
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	...	b_{n-1}	$b_n=r$

В первой строке выписывают коэффициенты многочлена $P_n(x)$ (отрицательные коэффициенты со знаком «—», перед положительными коэффициентами знак «+» можно опустить). В третью строку сразу же переносят $a_0 = b_0$. Затем каждый коэффициент b_i умножают на ξ и подписывают под следующим коэффициентом a_{i+1}. Числа первой и второй строки складывают и результат b_{i+1} записывают в третьей строке. Таким образом, в третьей строке записаны коэффициенты частного, полученного от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - \xi$, и остаток, численно равный значению этого многочлена при $x = \xi$, т. е. $b_n = P_n(\xi) = r$.

Пример 2. Пользуясь схемой Горнера, произвести деление многочлена

$$P_n(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$$

на двучлен $x - 3$.

Решение. Составляем схему Горнера для данного многочлена:

	1	3	—2	1	—1	1
3	$\vdots$	3	18	48	147	438
	1	6	16	49	146	$439=P(3)=r$

Таким образом,

$$r = P_n(3) = 439, \; g(x) = x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 49x + 146$$

(этот пример ранее мы решали путем деления «углом»). Следовательно,

$$P_n(x) = (x - 3)(x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 49x + 146) + 439.$$

Пример 3. Определить, является ли $\xi = 1$ корнем уравнения

$$x^3 + 2x^2 - 3 = 0.$$

Решение. Если $\xi = 1$ является корнем уравнения $P_n(x) = x^3 + 2x^2 - 3 = 0$, то многочлен $P_n(x)$ должен без остатка делиться на двучлен $x - 1$.

Будем решать пример, используя схему Горнера. Учитывая, что в многочлене $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ коэффициент при неизвестном в первой степени равен нулю, составим следующую схему:

	1	2	0	−3
1	⋮	1	3	3
	1	3	3	0

Итак, $P(1) = 0$ (остаток $r = 0$) и, значит, $\xi = 1$ является корнем заданного уравнения.

Известно, что всякий многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

с действительными коэффициентами можно представить и притом единственным способом в виде произведения своего старшего коэффициента a_0 и нескольких многочленов степени не выше двух с действительными коэффициентами. Линейные множители в этом разложении соответствуют действительным корням уравнения $P_n(x) = 0$, а квадратичные — парам комплексно-сопряженных корней, т. е.

$$P_n(x) = a_0 (x - \xi_1)^{k_1} (x - \xi_2)^{k_2} \ldots (x - \xi_s)^{k_s} \ldots$$
$$\ldots (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \ldots (x^2 + p_m x + q_m)^{l_m} = 0.$$

Квадратные трехчлены, входящие в разложение, действительных корней не имеют и уже не могут быть разложены на линейные множители с действительными коэффициентами.

Таким образом, зная разложение многочлена на множители, можно свести задачу отыскания корней уравнения $P_n(x) = 0$ к решению совсем простых уравнений. Одним из таких методов является вышеизложенный метод Горнера. Для деления многочлена на квадратный трехчлен вида $x^2 + px + q$ также имеется очень удобная схема.

§ 3.14. Схема деления многочлена на квадратный трехчлен

Разделим многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

на трехчлен вида $\varphi(x) = x^2 + px + q$. Можно записать

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n =$$
$$= (x^2 + px + q)(b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + b_2 x^{n-4} + \ldots + b_{n-3} x + b_{n-2}) +$$
$$+ b_{n-1} x + b_n.$$

Раскрывая скобки в правой части этого равенства, производя приведение подобных членов и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$
\begin{array}{lcl}
a_0 = b_0, & & b_0 = a_0, \\
a_1 = b_1 + pb_0, & & b_1 = a_1 - pb_0, \\
a_2 = b_2 + pb_1 + qb_0, & & b_2 = a_2 - pb_1 - qb_0, \\
a_3 = b_3 + pb_2 + qb_1, & & b_3 = a_3 - pb_2 - qb_1, \\
a_4 = b_4 + pb_3 + qb_2, & \text{или} & b_4 = a_4 - pb_3 - qb_2, \\
a_5 = b_5 + pb_4 + qb_3, & & b_5 = a_5 - pb_4 - qb_3, \\
\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\
a_{n-2} = b_{n-2} + pb_{n-3} + qb_{n-4}, & & b_{n-2} = a_{n-2} - pb_{n-3} - qb_{n-4}, \\
a_{n-1} = b_{n-1} + pb_{n-2} + qb_{n-3}, & & b_{n-1} = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3}, \\
a_n = b_n + qb_{n-2}, & & b_n = a_n - qb_{n-2}.
\end{array}
$$

Отсюда получаем следующую *схему деления многочлена на квадратный трехчлен*:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
$-p$	$\vdots$	$-pb_0$	$-pb_1$	$-pb_2$	$-pb_3$	...	$-pb_{n-3}$	$-pb_{n-2}$	
$-q$	$\vdots$		$-qb_0$	$-qb_1$	$-qb_2$	...	$-qb_{n-4}$	$-qb_{n-3}$	$-qb_{n-2}$
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	...	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n

Пример. Разложить на множители многочлен

$$P_n(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 - 33x^2 - 30x - 25,$$

зная, что одним из сомножителей является квадратный трехчлен $g(x) = x^2 + x + 1$.

Решение. Многочлен $P_n(x)$ нечетной степени, поэтому он имеет хотя бы один действительный корень, который обязательно служит делителем свободного члена. Таким образом, целыми корнями данного многочлена могут быть только числа -1 и 1, -5 и 5, -25 и 25.

Проверим по схеме Горнера, будет ли $x = -5$ корнем многочлена:

	1	-2	-7	-33	-30	-25
-5	$\vdots$	-5	35	-140	865	-4175
	1	-7	28	173	835	$-4200 \neq 0$

Так как $P(-5) \neq 0$, то $x = -5$ не является корнем многочлена $P_n(x)$.

Проверим теперь $x = 5$:

	1	−2	−7	−33	−30	−25
5	⋮	5	15	40	35	25
	1	3	8	7	5	0

Итак, $P(5) = 0$; следовательно, $x = 5$ — корень $P_n(x)$. Данный многочлен можно представить в виде

$$P_n(x) = (x - 5)(x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 7x + 5).$$

Один из множителей $g_1(x) = x^2 + x + 1$ нам известен, поэтому разделим на него многочлен $Q(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 7x + 5$ по схеме деления многочлена на квадратный трехчлен:

	1	3	8	7	5
−1	⋮	−1	−2	−5	
−1	⋮		−1	−2	−5
	1	2	5	0	0

Итак, $g_2(x) = x^2 + 2x + 5$. Следовательно, многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде произведения сомножителей с действительными коэффициентами таким образом:

$$P_n(x) = (x - 5)\ (x^2 + x + 1)\ (x^2 + 2x + 5).$$

Если потребуется найти корни уравнения $P_n(x) = 0$, то приравнивая нулю каждый из сомножителей, легко определим эти корни:

а) $x - 5 = 0;\quad x_1 = 5;$

б) $x^2 + x + 1 = 0;\quad x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

в) $x^2 + 2x + 5 = 0;\quad x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i.$

Здесь сознательно приведен очень простой пример, где многочлен $P_n(x)$ имеет точный корень, который легко установить, и где заранее известен квадратный трехчлен, являющийся делителем $P_n(x)$.

Из вышеизложенного следует, что для нахождения корней алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ нужно уметь разлагать многочлен $P_n(x)$ на множители (линейные или квадратичные). При этом существенную роль играет определение приближенного значения действительных корней уравнения (для получения линейных множителей), а также способ построения квадратичного множителя.

Для нахождения приближенного значения действительных корней алгебраического уравнения можно применять любые из ранее изложенных методов (методы проб, хорд, касательных, итерации, комбинированные методы).

Квадратичный множитель можно выделить различными способами. В следующем параграфе мы рассмотрим один из них — способ Хичкока.

§ 3.15. Выделение квадратного трехчлена по методу Хичкока

Пусть задано алгебраическое уравнение

$$f_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (1)$$

Разделим многочлен $f_n(x)$ на трехчлен

$$g_2(x) = x^2 + px + q \quad (2)$$

с неопределенными коэффициентами; тогда получим тождество

$$f_n(x) = (x^2 + px + q)\, L(x) + xP(p, q) + Q(p,q), \quad (3)$$

где $L(x)$ — частное от деления $f_n(x)$ на $g_2(x)$, а $P(p, q)$ и $Q(p, q)$—многочлены от p и q.

Для того чтобы трехчлен $g_2(x)$ был делителем $f_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $P(p, q) = 0$ и $Q(p, q) = 0$.

Если решить систему

$$P(p, q) = 0, \quad Q(p, q) = 0, \quad (4)$$

то тем самым и будут найдены коэффициенты квадратного трехчлена (2).

Этот метод выделения квадратного трехчлена и называется *методом Хичкока*. Он по существу является разновидностью метода Ньютона для решения систем уравнений, однако здесь не используется явный вид многочленов $P(p, q)$ и $Q(p, q)$. Их значения и значения производных, нужные в методе Ньютона, находятся путем двукратного деления $f_n(x)$ на приближенное выражение $g_2(x)$.

Разделим многочлен $L(x)$, входящий в соотношение (3), на трехчлен (2) и запишем тождество

$$L(x) = (x^2 + px + q)L_1(x) + xR(p, q) + S(p, q). \quad (5)$$

Подставляя $L(x)$ в равенство (3), получим

$$f_n(x) = (x^2 + px + q)^2 L_1(x) + (x^2 + px + q)[xR(p, q) + S(p, q)] + \\ + xP(p, q) + Q(p, q). \quad (6)$$

Дифференцируя последнее равенство по p и q, имеем

$$\begin{aligned} (f_n(x))'_p &= 2x(x^2 + px + q) L_1(x) + (L_1(x))'_p (x^2 + px + q)^2 + \\ &+ x^2 R(p, q) + xS(p, q) + xP'_p(p, q) + Q'_p(p, q), \\ (f_n(x))'_q &= 2(x^2 + px + q) L_1(x) + (L_1(x))'_q (x^2 + px + q)^2 + \\ &+ xR(p, q) + S(p, q) + xP'_q(p, q) + Q'_q(p, q). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть α_i (где $i = 1, 2$) — корни квадратного трехчлена (2). Тогда при подстановке α_i в выражение (2) получим

$$g_2(\alpha_i) = \alpha_i^2 + p\alpha_i + q = 0$$

(корень α_i обращает квадратный трехчлен в нуль). Следовательно,

$$\alpha_i^2 = -p\alpha_i - q \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

С другой стороны, подставляя α_i в равенства (7), имеем

$$\begin{cases} \alpha_i^2 R(p, q) + \alpha_i S(p, q) + \alpha_i \cdot P'_p(p, q) + Q'_p(p, q) = 0, \\ \alpha_i R(p, q) + S(p, q) + \alpha_i P'_q(p, q) + Q'_q(p, q) = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Используя соотношение (8), запишем равенства (9) в виде

$$\begin{cases} \alpha_i [P'_p(p, q) + S(p, q) - pR(p, q)] + [Q'_p(p, q) - qR(p, q)] = 0, \\ \alpha_i [P'_q(p, q) + R(p, q)] + [Q'_q(p, q) + S(p, q)] = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Если трехчлен (2) имеет различные корни ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), то из соотношений (10) вытекает равенство нулю каждой из квадратных скобок, т. е.

$$\begin{cases} P'_p(p, q) = pR(p, q) - S(p, q), \\ Q'_p(p, q) = qR(p, q), \\ P'_q(p, q) = -R(p, q), \\ Q'_q(p, q) = -S(p, q). \end{cases} \qquad (11)$$

Таким образом, двукратное деление многочлена $f_n(x)$ на трехчлен $g_2(x) = x^2 + px + q$ дает возможность получить частные производные от $P(p, q)$ и $Q(p, q)$ по p и q и затем решать систему (4) по методу Ньютона.

Если уже известно k -е приближение p_k и q_k, то уточнение коэффициентов делителя $g_2(x)$ производится по формулам

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k + h_k, \quad \text{где} \quad h_k = \frac{\Delta p_k}{\Delta_k}, \\ q_{k+1} &= q_k + t_k, \quad \text{где} \quad t_k = \frac{\Delta q_k}{\Delta_k}, \end{aligned} \qquad (12)$$

а Δ_k, Δp_k и Δq_k, в свою очередь, определяются так:

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \begin{vmatrix} P'_p(p_k, q_k) & P'_q(p_k, q_k) \\ Q'_p(p_k, q_k) & Q'_q(p_k, q_k), \end{vmatrix}, \\ \Delta p_k &= \begin{vmatrix} P'_q(p_k, q_k) & P(p_k, q_k) \\ Q'_q(p_k, q_k) & Q(p_k, q_k) \end{vmatrix}, \\ \Delta q_k &= \begin{vmatrix} P(p_k, q_k) & P'_p(p_k, q_k) \\ Q(p_k, q_k) & Q'_p(p_k, q_k) \end{vmatrix}. \end{aligned} \qquad (13)$$

Значения производных находятся по формулам (11):

$$\begin{aligned} P'_p(p_k, q_k) &= p_k R_k - S_k; \quad & P'_q(p_k, q_k) &= -R_k; \\ Q'_p(p_k, q_k) &= q_k R_k; \quad & Q'_q(p_k, q_k) &= -S_k. \end{aligned}$$

Величины $P(p_k, q_k)$ и $Q(p_k, q_k)$ определяются по формулам (3), а R_k и S_k — по формулам (5) при подстановке в них $p = p_k$ и $q = q_k$.

Расчеты удобно оформлять в виде двух вычислительных схем, одна из которых служит для двукратного деления на $g_2^k(x)$, а другая — для вычисления поправок h_k и t_k.

Пример. Решить уравнение

$$x^4 + 4x^3 + 4{,}8x^2 + 16x + 1 = 0$$

с точностью до 0,001 при помощи выделения квадратичного множителя.

Решение. Отделим какие-нибудь два корня уравнения, определяя знаки функции $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4{,}8x^2 + 1{,}6\,x + 1$ при некоторых значениях аргумента x:

x	0	1	−1	−2	−3	−4
$\operatorname{sign} f(x)$	−	+	−	−	−	+

Один корень лежит в интервале (0, 1), другой — в интервале (−4, −3).

Примем $x_1 \approx 0{,}5$; $x_2 \approx -3{,}5$, тогда за начальное приближение квадратичного делителя многочлена $f(x)$ можно взять

$$g_2^{(0)}(x) = x^2 + (-0{,}5 + 3{,}5)\; x - 3{,}5 \cdot 0{,}5 = x^2 + 3x - 1{,}75,$$

где $p_0 = 3$, $q_0 = -1{,}75$.

Расчеты оформим в виде схем (см. табл. 3.15, 3.16).

Таблица 3.15

k		1	4	4,8	16	1
0	$-p=-3$ $-q=1{,}75$ $-p=-3$ $-q=1{,}75$ 	 1 1	−3 — 1 −3 — $-2=R_0$	−3 1,75 3,55 — 1,75 $5{,}30=S_0$	−10,65 1,75 $7{,}1=P_0$	— 6,2125 $5{,}2125=Q_0$
1	−3,9 0,15 −3,9 0,15 	 1 1	−3,9 — 0,1 −3,9 — $-3{,}8=R_1$	−0,39 0,15 4,56 — 0,15 $4{,}71=S_1$	−17,784 0,015 $-1{,}769=P_1$	— 0,684 $-0{,}316=Q_1$
2	−3,79 0,23 −3,79 0,23 	 1 1	−3,79 — 0,21 −3,79 — $-3{,}58=R_2$	−0,7959 0,23 4,2341 — 0,23 $4{,}4641=S_2$	−16,0472 0,0483 $0{,}0011=P_2$	— 0,9738 $-0{,}0262=Q_2$
3	−3,7889 0,2361 −3,7889 0,2361 	 1 1	−3,7889 — 0,2111 −3,7889 — −3,5778	−0,79984 0,2361 4,23626 — 0,2361 4,47236	−16,05077 0,04984 −0,00093	— 1,00018 0,00018
4	−3,78885 0,23607	1	−3,78885 — 0,21115	−0,800016 0,23607 4,236054	−16,04977 0,049846 0,000076	— 1,000005 0,000005

Таблица 3.16

k	p_k q_k	R_k S_k	P_k Q_k	$P'_p(p_k, q_k)$ $Q'_p(p_k, q_k)$	$P'_q(p_k, q_k)$ $Q'_q(p_k, q_k)$	Δ_k	Δp_k Δq_k	h_k t_k
0	3 —1,75	—2 5,3	7,1 5,2125	—11,3 3,5	2 —5,3	52,89	48,055 83,751	0,9 1,6
1	3,9 —0,15	—3,8 4,71	—1,769 —0,316	—19,53 0,57	3,8 —4,71	89,82	—9,533 —7,180	—0,11 —0,008
2	3,79 —0,23	—3,58 4,4641	0,0011 —0,0262	—18,0323 0,8234	3,58 —4,4641	77,55	—0,0889 —0,4715	—0,0011 —0,0061
3	3,7889 —0,2361	—3,5778 4,47236	—0,0093 0,00018	—18,0283 0,8447	3,5778 —4,47236	77,607	—0,00352 0,00246	—0,00005 0,00003
4	3,78885 —0,23607							

Следовательно,

$$f(x) \approx (x^2 + 3{,}78885x - 0{,}23607)(x^2 + 0{,}21115x + 4{,}23605) = 0.$$

Для нахождения искомых корней остается решить два квадратных уравнения:

1) $x^2 + 3{,}78885x - 0{,}23607 = 0$, откуда

$$x_{1,2} = -1{,}894425 \pm \sqrt{3{,}588846 + 0{,}23607} = -1{,}894425 \pm 1{,}9557739,$$

т. е. $x_1 \approx -3{,}8502$; $x_2 \approx 0{,}0613$;

2) $x^2 + 0{,}21115x + 4{,}23605 = 0$, откуда

$$x_{3,4} = -0{,}105575 \pm \sqrt{0{,}01115 - 4{,}23605} = -0{,}105575 \pm 2{,}0555i,$$

т. е. $x_{3,4} \approx -0{,}1056 \pm 2{,}0555i$.

Таким образом,

$$x_1 \approx -3{,}850;\ x_2 \approx 0{,}0613;\ x_{3,4} \approx -0{,}1056 \pm 2{,}0555i.$$

Упражнения

1. Отделить корни аналитически и уточнить их до 0,001 методом проб:

а) $x^3 - x + 1 = 0$; б) $x^3 + 2x - 4 = 0$; в) $x^4 + 5x - 3 = 0$;

г) $2{,}2x - 2^x = 0$; д) $2^x - 2x^2 - 1 = 0$; е) $2^x - 4x = 0$.

Ответы: а) $-1{,}325$; б) 1,180; в) $-1{,}876$; 0,578; г) 0,781; 2,401; д) 0,0; 0,399; 6,352; е) 0,310; 4,0.

2. Отделить корни графически и уточнить их до 0,001 методом хорд:

а) $x^3 + x - 3 = 0$; б) $x^3 + 8x - 6 = 0$; в) $x^3 + 10x - 9 = 0$; г) $x^2 - \cos \pi x = 0$;

д) $x^2 - \sin \pi x = 0$; е) $\lg x - \frac{1}{x^2} = 0$.

Ответы: а) 1,213; б) 0,706; в) 0,841; г) $-0{,}438$; 0,438; д) 0,0; 0,787; е) 1,897.

3. Методом касательных с точностью до 0,001 найти корни уравнений:

а) $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$; б) $x^3 - 12x - 8 = 0$; в) $x^3 + 4x^2 - 6 = 0$;

г) $2 \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$; д) $x^2 - 20 \sin x = 0$; е) $x - \cos x = 0$.

Ответы: а) $-4{,}071$; 0,468; 0,993; б) $-0{,}695$; $-3{,}067$; 3,757; в) $-3{,}523$; $-1{,}567$; 1,086; г) 0,398; 4,682; д) 0,0; 2,753; е) 0,739.

4. Комбинированным методом хорд и касательных с точностью до 0,001 найти корни уравнений:

а) $x^3 + 6x - 5 = 0$; б) $x^3 - 2x + 7 = 0$; в) $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$;

г) $1{,}8x^2 - \sin 10x = 0$; д) $\lg x - \frac{7}{2x + 6} = 0$; е) $2x \cdot \ln x - 1 = 0$

Ответы: а) 0,760; б) $-2{,}258$; в) $-0{,}465$; г) $-0{,}567$; $-0{,}335$; 0,0; д) 3,473; е) 1,422.

5. Пользуясь методом Штурма, отделить корни уравнений и уточнить их до 0,001 методом итерации:

а) $x^3 + 4x - 3 = 0$; б) $x^4 - 2x - 1 = 0$;

в) $x^5 - 5x + 2 = 0$; г) $x^4 + x - 3 = 0$.

Ответы: а) $-0{,}532$; 0,653; 2,879; б) $-0{,}475$; 1,395; в) $-1{,}582$; 0,402; 1,372; г) $-1{,}453$; 1,164.

6. Методом итерации найти корни уравнений с точностью до 0,001:

а) $\ln x+(x+1)^3=0$; б) $\sqrt{x+1}=\frac{1}{x}$; в) $x-\cos x=0$;

г) $3x-\cos x-1=0$; д) $x+\lg x=0,5$.

Ответы. а) 0,187; б) 0,755; в) 0,739; г) 0,607; д) 0,672.

7. Решить с помощью метода Ньютона системы двух уравнений, результаты получить с пятью верными цифрами. Начальное приближение найти графически:

а) $\begin{cases}\sin(x+y)-1,1x=-0,2,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ $x>0,\ y>0$; б) $\begin{cases}\sin(x+y)-1,6x=-0,1,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ $x>0,\ y>0$;

в) $\begin{cases}\operatorname{tg}(xy+0,4)=x^2,\\ 0,5x^2+2y^2=1\end{cases}$ $x>0,\ y>0$; г) $\begin{cases}e^{xy}=x^2-y+1,5,\\ (x+0,5)^2+y^2=1,0.\end{cases}$

Ответы: а) 0,99386; $y=0,11065$; б) $x=0,67975$; $y=0,73344$; в) $x=1,1077$; $y=0,43962$; г) $x=0,38951$; $y=0\ 45692$.

8. Решить системы уравнений методом итерации. Результаты получить с пятью верными знаками:

а) $\begin{cases}2x^2-xy-5x+1=0,\\ x+3\lg x-y^2=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2y^2-3x^3-6y^3+8=0,\\ x^4-9y+2=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sin x-y=1,32,\\ \cos y-x=-0,85.\end{cases}$

Ответы: а) $x_1=1,4589$; $y_1=-1,3968$; $x_2=3,4874$; $y_2=2,2616$; б) $x_1=-2,0000$; $y_1=2,0000$; $x_2=1,3508$; $y_2=0,59214$; в) $x=1,7913$; $y=-0,34422$.

9. Используя метод Хичкока выделения квадратного множителя, найти с пятью верными цифрами корни уравнений:

а) $x^3-3x^2-3=0$; б) $x^3-x-1=0$; в) $x^4-6x^3+11x^2+2x-28=0$.

Ответы: а) 3,2790; $-0,13951\pm0,94628\,i$; б) 1,3247; $-0,66236\pm0,56228\,i$; в) $-1,2361$; 3,2361; $2,0000\pm1,7321\,i$.

Глава IV

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ

§ 4.1. Способы задания функций

В практической деятельности постоянно приходится сталкиваться с необходимостью выявления форм связи в процессах и явлениях и необходимостью их математического описания.

Остановимся на таких формах связи, для которых некоторая величина y, характеризующая процесс, зависит от совокупности несвязанных между собой величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таким образом, что каждому набору $(x_1; x_2; \ldots, x_n)$ соответствует единственное значение величины y.

Такое однозначное соответствие величины y совокупности независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *функциональной зависимостью*, а сама переменная величина y — *функцией* переменных величин x_1, x_2, ..., x_n, что формально записывается в виде

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Так, выражение $y = x_1^2 + 3\sqrt{x_2} + x_1x_3^2$ является функцией трех переменных.

Если величина y есть функция одной независимой переменной x, то эту связь можно представить соотношением следующего вида:

$$y = f(x).$$

Например, площадь круга S является функцией независимой переменной — радиуса круга R, т. е. $S = f(R)$; конкретный вид этой функции $S = \pi R^2$. Объем фигуры является уже функцией трех измерений: $V = f(x_1, x_2, x_3)$, и в зависимости от вида фигуры эта функциональная связь соответственно конкретизируется.

Из курса математического анализа известны три способа задания функциональных зависимостей: 1) аналитический; 2) графический; 3) табличный.

Наиболее удобным способом задания функциональной зависимости $y = f(x)$ является *аналитический*, так как он прямо указывает действия и их последовательность выполнения над независимой переменной x для получения соответствующего значения величины y.

Так, например, в результате математической обработки можно получить следующую аналитическую зависимость денежных кредитов в сельском хозяйстве под товарно-материальные ценности и сезонные затраты от затрат на крупный рогатый скот:

$$y = 51{,}0203 + 0{,}1059\,x,$$

где y — кредиты под товарно-материальные ценности; x — затраты на крупный рогатый скот.

Другой пример аналитической зависимости: связь пути со временем в равноускоренном движении выражается как

$$s = vt + \frac{at^2}{2}.$$

Положительным качеством аналитического способа задания является возможность получать значения y для любого фиксированного аргумента x с любой точностью.

К недостаткам этого способа следует отнести то, что приходится производить всю последовательность вычислений; кроме того, аналитический метод не обладает наглядностью.

Указанные недостатки аналитического способа устраняются в случае *графического задания* функции $y = f(x)$.

Графиком данной функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

Табличный способ задания функций распространен в технике, физике, экономике, естествознании (и чаще всего возникает в результате эксперимента).

Пусть, например, в результате опыта получена зависимость омического сопротивления R медного стержня от температуры $t°$ в виде следующей таблицы:

R	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10
$t°$	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0

В этом эксперименте значение омического сопротивления медного стержня меняется при колебаниях температуры и является зависимой переменной.

Преимуществом табличного способа задания функции является то, что для каждого значения независимой переменной, помещенной в таблицу, можно сразу же, без всяких измерений и вычислений, найти соответствующее значение функции.

Недостаток табличного способа состоит в том, что нельзя задать всю функцию сплошь, т. е. всегда найдутся такие значения независимой переменной, которых нет в таблице.

§ 4.2. Математические таблицы

Среди функций, постоянно встречающихся в математике, много таких, вычисление которых, несмотря на их простоту, довольно громоздко. В этих случаях вычислительную работу облегчают математические таблицы.

Наиболее распространены таблицы функций одной переменной. К ним относятся таблицы обратных чисел, квадратов и кубов чисел, квадратных и кубических корней, таблицы логарифмов, таблицы тригонометрических функций, таблицы показательной и других элементарных функций. Составляют таблицы функций двух и большего числа переменных. Примером таблицы функции двух переменных может служить таблица произведений двух чисел.

Таблица представляет собой набор значений функции для последовательности значений аргументов x_0, x_1, x_2, ..., x_n. Она должна содержать такой набор значений аргумента, чтобы для любых значений аргумента, отличных от x_0, x_1, x_2, ..., x_n, можно было получить значение функции с необходимой степенью точности.

Основными характеристиками таблиц являются: 1) название функций, значение которых они выражают; 2) объем; 3) шаг; 4) количество знаков табулируемой функции; 5) количество входов.

Названием функции, численные значения которой собраны в таблице, является аналитическое выражение этой функции, например $\sin x$, $\lg x$, e^x и т. д.

Объем таблицы выражается начальным и конечным значением аргумента. Так, например, объем таблицы $y = \sin x$ охватывает значения аргумента от 0°0′ до 89°54′.

Почти для всех табулируемых функций значения аргумента в таблице образуют арифметическую прогрессию, разность которой h называется *шагом таблицы*. Таким образом,

$$h = x_{i-1} - x_i = \text{const} \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

или

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \ \ldots .$$

В качестве иллюстрации рассмотрим фрагмент таблицы перевода радианов в градусы и градусов в радианы (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Радианы	Градусы	Радианы	Градусы	Градусы	Радианы	Градусы	Радианы	Минуты	Радианы	Минуты	Радианы
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
0,20	11,459	0,70	40,107	20	0,34907	70	1,22173	20	0,00582	50	0,01454
21	12,032	71	40,680	21	36652	71	23918	21	00611	51	01484
22	12,605	72	41,253	22	38397	72	25662	22	00640	52	01513
23	13,178	73	41,826	23	40143	73	27409	23	00669	53	01542
24	13,751	74	42,399	24	41888	74	29151	24	00698	54	01571

В первых двух колонках приведенной таблицы в качестве независимой переменной выступает радианная мера, а градусы рассматриваются как ее функция. То же справедливо и для третьей и четвертой колонок. В качестве шага таблицы здесь выбирается $h = 0{,}01$ радиана.

Начиная с пятой колонки, рассматривается функция, обратная данной, где в качестве независимой переменной выбираются градусы (или минуты), а соответственно радианная мера является функцией градусов (или минут). Шаг этой части таблицы равен одному градусу (в пятой и седьмой колонках) и одной минуте (в девятой и одиннадцатой колонках).

В справочных таблицах используется также и сложный двухуровневый шаг. По вертикали откладываются значения аргумента, отличающиеся на так называемый «грубый» шаг $x_i = x_{i-1} + h^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и соответствующие им значения функции $y_i = f(x_i) = f(x_{i-1} + h^*)$, а по горизонтальной линии располагаются значения функции в точках, отстоящих друг от друга на шаг, равный в большинстве случаев десятой доли «грубого» шага: $h = 0{,}1\, h^*$. Так, в табл. 4.2 на стр. 165 приведен фрагмент таблицы кубических корней. Из приведенного фрагмента таблицы нетрудно определить «грубый» шаг по вертикали, равный $h^* = 1$, и более точный шаг по горизонтали, равный $h = 0{,}1$.

Обычно шаг таблицы выражается одной единицей какого-либо разряда (реже двумя или пятью единицами определенного разряда). Так, в таблицах квадратов, кубов, квадратных, кубических корней, в таб-

Таблица 4.2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	8,43433	43901	44369	44836	45303	45769	46235	46700	47165	47629
61	8,48093	48556	49018	49481	49942	50403	50954	51324	51784	52243
62	8,52702	53160	53618	54075	54532	54988	55444	55899	56354	56808
63	8,57262	57715	58168	58620	59072	59524	59975	60425	60875	61325
64	8,61774	62222	62671	63118	63566	64012	64459	64904	65350	65795

Таблица 4.3

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′			1′	2′	3′	4′	5′
65°	0,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	0,9135	24°	1	2	4	5	6
66°	0,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	0,9205	23°	1	2	3	5	6
67°	0,9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	0,9272	22°	1	2	3	4	6
68°	0,9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	0,9336	21°	1	2	3	4	5
69°	0,9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	0,9397	20°	1	2	3	4	5

лицах логарифмов «грубый» шаг $h^* = 1$, в таблицах натуральных логарифмов, таблицах обратных чисел «грубый» шаг h^* равен 0,1 (см. табл. 4.2).

Если мы обратимся к таблице синусов (см. табл. 4.3 на стр. 165), то в ней в качестве «грубого» шага выбирается один градус, более точный шаг равен шести минутам.

Следующей характеристикой таблиц является *количество знаков* табулируемой функции, так как значения функции $y = f(x)$ для табулированных значений аргумента в математических таблицах и результаты измерений в технических таблицах являются приближенными величинами.

При ручной отладке программ для ЭВМ расчеты ведут с помощью таблиц, обладающих повышенной точностью. К ним относятся«Таблицы семизначных логарифмов» Вега, «Таблицы Барлоу», содержащие квадраты, кубы, квадратные и кубические корни, а также обратные величины.

Для практических ручных расчетов наиболее употребительными являются «Пятизначные математические таблицы» Б. И. Сегала и К. А. Семендяева, «Справочник по математике» И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева и т. д.

В таблицы вносятся только верные знаки числового значения функции; это означает, что погрешность не превышает пяти единиц первого отброшенного разряда. При этом значения функции для всех значений x, приводимых в таблице, определяются с одинаковой абсолютной погрешностью. Точность, с которой приведены в таблице значения функции, называется точностью таблицы. Иногда на разных участках таблицы точность бывает разной.

В некоторых случаях при работе с таблицами необходимо знать разности соседних приведенных в таблице значений функций. Эти разности называются *табличными разностями* и обозначаются через Δy:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ \ldots, \ \Delta y_k = y_{k-1} - y_k.$$

Для разностей в таблицах иногда отводят отдельный столбец, а чаще они выписываются в столбце значений функций в промежутке между соответствующими ее значениями. Разности записываются в единицах последнего разряда без нулей впереди значащих цифр и без запятой. Например, в таблице

x	$\sin x$
1,000	0,84147
1,001	0,84201

табличная разность $\Delta y = 0{,}84201 - 0{,}84147 = 0{,}00054$ напечатана между соответствующими значениям $\sin x$ значащими цифрами как 54.

Следующей важной характеристикой таблиц является *количество входов* в нее. Оно равнозначно числу аргументов функции. Так, таблицы для функциональных зависимостей $y = f(x)$ являются таблицами с одним входом. К ним относятся приведенные выше таблицы 4.1, 4.2 и 4.3.

Табулирование функции двух переменных $z = f(x, y)$ приводит к таблице с двумя входами. Среди подобных таблиц широкое практическое применение находят таблицы умножения.

Таблица 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
541	1082	1623	2164	2705	3246	3787	4328	4869
542	1084	1626	2168	2710	3252	3794	4336	4878
543	1086	1629	2172	2715	3258	3801	4344	4887
544	1088	1632	2176	2720	3260	3808	4352	4896
545	1090	1635	2180	2725	3270	3815	4360	4905

В табл. 4.4 трехразрядное множимое записывается в левый столбец, одноразрядный множитель — в верхнюю строку таблицы. Шаг обоих входов в таблицу равен единице. Для получения произведения трехзначного числа на однозначное достаточно найти строку, в первом столбце которой записано множимое, и выбрать тот столбец, в котором расположен множитель. На пересечении найденных строки и столбца и находится искомое произведение.

Пример 1. Пусть требуется умножить 543 на 8. В табл. 4.4 находим строку, содержащую 543, и столбец под номером 8. На их пересечении читаем число 4344, что и является искомым произведением.

Для умножения многозначных чисел множимое разбивают на части, содержащие не более трех цифр, и к каждой из этих частей применяют указанный способ.

Пример 2. Пусть требуется умножить 541 544 на 37. Разбиваем число 541 544 на две трехразрядные части 541 и 544. Последовательно умножаем каждую часть на 3 десятка и на 7 единиц, полученные частичные произведения складываем:

$$\begin{array}{r} 541 \times 30 = 16230 \\ \underline{541 \times 7 = 3787} \\ 20017 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 544 \times 30 = 16320 \\ \underline{544 \times 7 = 3808} \\ 20128 \end{array}$$

Первое частичное произведение сносим на три разряда влево относительно второго и складываем:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 20017 \\ 20128 \end{array} \\ \hline 20037128 \end{array}$$

Это и есть искомый результат.

При работе с таблицами следует помнить, что в их расположении бывают особенности. Поэтому, обращаясь к новому справочнику, необходимо ознакомиться с его описанием.

§ 4.3. Математическая постановка задачи интерполирования

В экономике и технике постоянно приходится сталкиваться с необходимостью вычисления значений функции $y = f(x)$ в точках x, отличных от значений аргумента, фиксированных в таблице. Кроме того, в некоторых случаях, несмотря на то, что аналитическое выражение функции $y = f(x)$ известно, оно является слишком сложным и неудобным для дальнейших математических преобразований. Подобные задачи практики формализуются как математические *задачи интерполирования*.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$ своими $n + 1$ значениями

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n)$$

в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые назовем *узлами интерполяции*. Требуется найти аналитическое выражение $F(x)$ табулированной функции

y_0	y_1	...	y_n
x_0	x_1	...	x_n

совпадающей в узлах интерполяции со значениями заданной функции, т. е.

$$y_0 = F(x_0) = f(x_0),\ y_1 = F(x_1) = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = F(x_n) = f(x_n).$$

Процесс вычисления значений функции в точках x, отличных от узлов интерполяции, называют *интерполированием* функции $f(x)$.

Если аргумент x, для которого определяется приближенное значение функции, принадлежит заданному отрезку $[x_0, x_n]$, то задача вычисления приближенного значения функции называется *интерполированием в узком смысле*. Если аргумент x находится за пределами отрезка интерполирования $[x_0, x_n]$, то задача определения значения функции в точке x называется *экстраполированием*.

Геометрически задача интерполирования для функции одной переменной $y = f(x)$ означает построение кривой, проходящей через точки плоскости с координатами $(x_0;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$, ..., $(x_n;\ y_n)$ (рис. 4.1). Однако уже из рисунка интуитивно ясно, что через данные точки можно провести бесчисленное множество различных кривых. Таким образом, задача отыскания функции $f(x)$ по конечному числу ее значений слишком неопределенна.

Эта задача становится однозначной, если в качестве интерполирующей функции $F(x)$ для функции $y = f(x)$, заданной $n + 1$ своими значениями, выбрать многочлен $F_n(x)$ степени не выше n, такой, что

$$F_n(x_0) = y_0,\ F_n(x_1) = y_1,\ \ldots,\ F_n(x_n) = y_n.$$

Многочлен $F_n(x)$, удовлетворяющий этим условиям, называют *интерполяционным многочленом*, а соответствующие формулы — *интерполяционными формулами*.

В случае, когда $F(x)$ выбирается в классе степенных функций, интерполяция называется *параболической*. Этот способ приближения основывается на том, что на небольших отрезках функция $f(x)$ может быть достаточно хорошо аппроксимирована параболой определенного порядка.

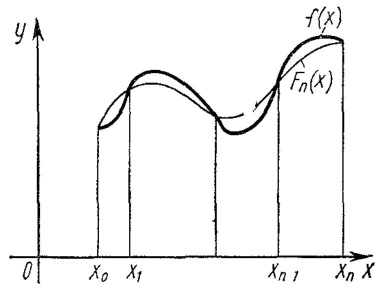


Рис. 4 1

Иногда целесообразно использовать другие виды интерполяции. Если интерполируемая функция $f(x)$ — периодическая, то в качестве класса $\{F(x)\}$ выбирают класс тригонометрических функций; в некоторых случаях за класс $\{F(x)\}$ выбирают рациональные функции.

При интерполировании возникает ряд задач: 1) выбор наиболее удобного способа построения интерполяционной функции для каждого конкретного случая; 2) оценка погрешности при замене $f(x)$ интерполирующей функцией $F(x)$ на отрезке $[a, b]$, поскольку функции $F(x)$ и $f(x)$ совпадают только в узлах интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$; 3) оптимальный выбор узлов интерполяции для получения минимальной погрешности.

§ 4.4. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Наиболее общей формулой параболического интерполирования является интерполяционная формула Лагранжа. Задача параболического интерполирования в этом случае формулируется следующим образом: на отрезке $[a, b]$ в узлах интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ задается функция $f(x)$ своими $n+1$ значениями

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n);$$

требуется построить многочлен $L(x)$ так, чтобы в узлах интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ его значения совпадали со значениями заданной функции, т. е.

$$L(x_0) = y_0,\quad L(x_1) = y_1,\ \ldots,\ L(x_n) = y_n.$$

Следует отметить, что в такой постановке задачи узлы интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ могут произвольно отстоять друг от друга на отрезке $[a, b]$, иными словами, узлы интерполяции *неравноотстоящие*, т. е. $h = x_{i+1} - x_i \neq \text{const}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$; величина h называется *шагом интерполяции*.

Задача имеет решение, если степень многочлена $L(x)$, которым мы заменяем неизвестную функцию $f(x)$, не выше n.

Представим многочлен $L(x)$ в виде

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

где a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — неизвестные постоянные коэффициенты, которые нам надо найти. Из начальных условий известно, что функция

$L_n(x)$ в узлах интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимает значения $L_n(x_0) = y_0$, $L_n(x_1) = y_1, \ldots, L_n(x_n) = y_n$. Тогда в узле интерполяции x_0 интерполяционный многочлен $L_n(x)$ имеет вид

$$L_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \ldots + a_nx_0^n,$$

в узле интерполяции x_1 — вид

$$L_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \ldots + a_nx_1^n$$

и т. д. Наконец, в точке x_n интерполяционный многочлен $L_n(x)$ есть

$$L_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \ldots + a_nx_n^n.$$

Запишем это в виде системы $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3+\ldots+a_nx_0^n=y_0, \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3+\ldots+a_nx_1^n=y_1, \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+a_3x_2^3+\ldots+a_nx_2^n=y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+a_3x_n^3+\ldots+a_nx_n^n=y_n, \end{array}\right. \tag{1}$$

где x_i и y_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ — табличные значения аргумента и функции.

Неизвестные $a_0, a_1, \ldots, a_n$ найдем по формулам Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \quad a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ — определитель системы (1). Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Действительно, определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, если $x_0, x_1, \ldots, x_n$ различны. Найдя коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$, можно представить интерполяционный многочлен в виде

$$L_n(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta} + \frac{\Delta_1}{\Delta}x + \frac{\Delta_2}{\Delta}x^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta}x^n.$$

Перепишем этот многочлен в другой форме:

$$L_n(x) = y_0Q_0(x) + y_1Q_1(x) + \ldots + y_nQ_n(x). \tag{2}$$

Отсюда следует, что функция $Q_i(x)$ должна удовлетворять условиям

$$Q_i(x_j)=\begin{cases}0, \text{ если } i\neq j;\\ 1, \text{ если } i=j.\end{cases}$$

Легко проверить, что такой многочлен имеет вид

$$Q_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \qquad (3)$$

В точках $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, \quad x_{i+1}, \dots, x_n$ функция $Q_i(x)$ обращается в 0, а в точке x_i равна 1.

Окончательно получим для формулы (2) выражение

$$L_n(x)=y_0\frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}+\dots$$

$$\dots+y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}. \qquad (4)$$

Этот многочлен называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.* В сокращенном виде его можно записать так:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \qquad (5)$$

Пример 1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблично:

x	1	2	3	5
y	1	5	14	81

Решение. Подставляем исходные данные в формулу (4); степень полученного многочлена Лагранжа не выше третьей, так как функция задается четырьмя значениями:

$$L_3(x)=1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)}+5\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)}+$$

$$+14\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)}+81\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)}=x^3-2x^2+3x-1.$$

Пример 2. Функция $f(x)$ задана таблично:

x	0	1	2	6
y	−1	−3	3	1187

Пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа, найти ее значение в точке $x=4$.

Решение. Подставляя в формулу (4) $x = 4$, имеем

$$L_3(4) = -1 \cdot \frac{(4-1)(4-2)(4-6)}{(-1)(-2)(-6)} - 3 \cdot \frac{4(4-2)(4-6)}{1(1-2)(1-6)} +$$
$$+3 \cdot \frac{4(4-1)(4-6)}{2(2-1)(2-6)} + 1187 \cdot \frac{4(4-1)(4-2)}{6(6-1)(6-2)} = 255.$$

Если в рассмотренном примере добавить к таблице еще одну точку, то вычисление значения функции при $x = 4$ придется производить заново. Кроме того, из самого примера видно, что процесс получения приближенного значения функции по интерполяционной формуле Лагранжа связан с большими вычислениями. Это приводит к необходимости упрощения вычислительной работы.

Для удобства вычислений составим вспомогательную таблицу

$x-x_0$	x_0-x_1	x_0-x_2	...	x_0-x_n	k_0
x_1-x_0	$x-x_1$	x_1-x_2	...	x_1-x_n	k_1
x_2-x_0	x_2-x_1	$x-x_2$	...	x_2-x_n	k_2
...	...	...	..	..	...
x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	...	$x-x_n$	k_n

где $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ — узлы интерполяции, а x — значение аргумента, для которого определяется приближенное значение по интерполяционной формуле Лагранжа. Обозначим произведение элементов первой строки через k_0:

$$k_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n). \tag{6}$$

В общем виде произведение элементов i-й строки есть

$$k_i = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots$$
$$\ldots (x_i - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n). \tag{7}$$

Числа $k_0, k_1, \ldots, k_n$ поместим в крайнем правом столбце таблицы. Дополнительно вычислим произведение элементов, расположенных на главной диагонали:

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n). \tag{8}$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа можно переписать в виде

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{k_i}. \tag{9}$$

Пользуясь формулой (9), решим снова пример 2 (см. стр. 171). Составим таблицу

4	-1	-2	-6	-48
1	$4-1$	$1-2$	$1-6$	15
2	-1	$4-2$	$2-6$	-16
6	$6-1$	$6-2$	$4-6$	-240

и найдем $\Pi_4(4) = -48$. Приближенное значение функции в точке $x = 4$, т. е. $f(4) \approx L_3(4)$, определим по формуле

$$L_3(x) = \Pi_4(x) \sum_{i=0}^{3} \frac{y_i}{k_i},$$

или

$$L_3(4) = -48\left[\frac{-1}{-48} + \frac{-3}{15} + \frac{3}{-16} + \frac{1187}{-240}\right] = 255.$$

Интерполяционная формула Лагранжа заметно упрощается, если узлы интерполяции *равноотстоящие*, т. е. $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$, где h — шаг интерполяции. Введем обозначение $q = (x - x_0)/h$. По формуле (3) имеем

$$Q_i(x) \equiv \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)};$$

так как

$$x - x_0 = qh,$$

$$x - x_1 = qh - h = h(q-1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x - x_i = qh - ih = h(q-i),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x - x_n = qh - nh = h(q-n),$$

то

$$Q_i(q) = \frac{q(q-1)\dots[q-(i-1)][q-(i+1)]\dots(q-n)h^n}{ih(i-1)h\dots h(-h)\dots[-(n-i)h]}. \tag{10}$$

Заметим, что часть произведения в знаменателе равна

$$ih(i-1)h\dots h = i!h^i,$$

а другая часть равна

$$(-h)\dots[-(n-i)h] = (-1)^{n-i}(n-i)!\,h^{n-i},$$

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства (10) на $(-1)^{n-i}(q-i)$, получим

$$Q_i(q) = \frac{q(q-1)\ldots(q-n)(-1)^{n-i}}{(q-i)\,i!\,(n-i)!} = (-1)^{n-i}\frac{C_n^i}{q-i}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{n!}, \tag{11}$$

где

$$C_n^i = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов интерполяции теперь можно записать в виде

$$L_n(x) = L_n(x_0 + qh) = \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{C_n^i}{q-i}y_i. \tag{12}$$

§ 4.5. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ совпадает с функцией $f(x)$ в узлах интерполяции $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Чтобы оценить степень приближения интерполяционного многочлена Лагранжа в точках, отличных от узлов интерполяции, надо сделать дополнительные предположения о поведении функции $f(x)$, заданной таблично. Будем считать, что функция $f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[a, b]$.

Представим погрешность в виде функции

$$R_n\, x) = f(x) - L_n(x) \tag{1}$$

и введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = R_n(x) - k\Pi_{n+1}(x), \tag{2}$$

где

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

есть многочлен, обращающийся в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots x_n$. Функция $\varphi(x)$ имеет $n+1$ корней, т. е. $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \ldots = \varphi(x_n) = 0$, так как в узлах интерполяции $R_n(x_i) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и один из сомножителей функции $\Pi_{n+1}(x)$ равен нулю.

Подберем теперь коэффициент k таким образом, чтобы функция $\varphi(x)$ имела еще один корень в любой фиксированной точке $\bar{x}$ отрезка $[a, b]$, но отличной от узлов интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$. При этом $\Pi_{n+1}(\bar{x}) \neq 0$, поскольку точка $\bar{x}$ отлична от узлов интерполяции. Точка $\bar{x}$ выбрана таким образом, чтобы $\varphi(\bar{x}) = 0$, т. е.

$$R_n(x) - k(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\ldots(\bar{x} - x_n) = 0;$$

тогда получим

$$k = \frac{R_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\ldots(\bar{x}-x_n)}. \tag{3}$$

Определим численное значение коэффициента k. Для этого функцию $\varphi(x)$ продифференцируем $n + 1$ раз. Так как $\varphi(x)$ обращается в нуль на $[a, b]$ в $n + 2$ точках: $\bar{x}$, x_0, x_1, ..., x_n, то на основании теоремы Ролля производная от $\varphi(x)$ обращается в нуль по крайней мере $n + 1$ раз на интервале (a, b). Применим снова теорему Ролля к функции $\varphi'(x)$. Вторая производная $\varphi''(x)$ обращается в нуль не менее n раз на интервале (a, b). Продолжая этот процесс, придем к выводу, что производная $(n + 1)$-го порядка функции $\varphi(x)$ имеет хотя бы один корень, т. е. $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Кроме того, из соотношений (1) и (2) вытекает, что

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - k\Pi_{n+1}(x).$$

Вычислим $(n + 1)$-е производные для каждого слагаемого вспомогательной функции $\varphi(x)$; имеем $\Pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$, так как $(n + 1)$-я производная от многочлена степени $n + 1$, старший коэффициент которого равен 1, есть $(n + 1)!$, а $L_n^{(n+1)}(x) = 0$, поскольку $(n + 1)$-я производная от многочлена степени n равна нулю. Тогда $(n + 1)$-ю производную от вспомогательной функции $\varphi(x)$ в точке ξ с учетом сказанного выше запишем следующим образом:

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0,$$

откуда

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) получим следующее равенство:

$$\frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\ldots(\bar{x}-x_n)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Следовательно,

$$R_n(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\ldots(\bar{x}-x_n).$$

Точки ξ и $\bar{x}$ принадлежат отрезку $[a, b]$, а x выбрано произвольно. Так как $\bar{x}$ — произвольная точка отрезка $[a, b]$, то можно записать

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Полагая, что $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ получаем *оценку погреш-*

ности для интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|. \qquad (5)$$

Пример. С какой точностью можно вычислить $\sqrt{117}$ с помощью интерполяционной формулы Лагранжа для функции $y = \sqrt{x}$, выбрав узлы интерполяции $x_0 = 100$; $x_1 = 121$; $x_2 = 144$?

Решение. Найдем $y' = \frac{1}{2} x^{-1/2}$, $y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$, $y''' = \frac{3}{8} x^{-5/2}$.

Отсюда $M_3 = \max|y'''| = \frac{8}{8\sqrt{100^5}}$ при $100 \leqslant x \leqslant 144$. На основании неравенства (5) получим

$$|R_2| \leqslant \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{3!} |(115-100)(115-121)(115-140)| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-3}.$$

§ 4.6. Конечные разности

Табулирование функций в большинстве случаев производится для равноотстоящих значений аргумента, т. е. $x_i = x_0 + ih$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n$, а h — шаг интерполяции.

Для вывода интерполяционных формул для равноотстоящих узлов интерполяции введем понятие *конечной разности.*

Поставим следующую задачу: для функции $y = f(x)$, заданной таблично своими значениями

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \dots,\ y_n = f(x_n)$$

в равноотстоящих узлах интерполяции, построить таблицу конечных разностей.

Назовем *конечной разностью первого порядка* разность между значениями функции в соседних узлах интерполяции. Тогда конечные разности в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ определяются соответственно как

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \Delta f(x_1),$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = f(x_3) - f(x_2) = \Delta f(x_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1}) = \Delta f(x_{n-1}),$$

где $h = \text{const}$.

В общем виде первая конечная разность запишется так:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

или

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (1)$$

В математической литературе используются несколько обозначений конечных разностей:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\quad \delta y_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i,\quad f_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i.$$

Из конечных разностей первого порядка можно образовать *конечные разности второго порядка*:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,\quad \delta^2 y_i = \delta y_{i+1/2} - \delta y_{i-1/2},\quad f_i^2 = f'_{i+1/2} - f'_{i-1/2}.$$

Первая запись второй конечной разности удобна для составления *горизонтальных* таблиц конечных разностей (табл. 4.5). Последней записью пользуются для составления *диагональных* таблиц конечных разностей (табл. 4.6). Мы будем пользоваться первым обозначением.

В общем виде *конечная разность n-го порядка* записывается так:

$$\Delta_y^n = \Delta\,(\Delta^{n-1}\,y). \tag{2}$$

Таблица 4.5

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4	Δy_4				
$x_5 = x_0 + 5h$	y_5					

Таблица 4.6

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
$x_1 = x_0 + h$	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
$x_4 = x_0 + 4h$					

Для составления некоторых интерполяционных формул используют таблицы *центральных разностей*, отличие которых от диагональных таблиц хорошо видно из сравнения таблиц 4.6 и 4.7.

В таблице центральных разностей (см. табл. 4.7) x_0 и y_0 расположены в середине столбца.

Таблица 4.7

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
	. . .	. . .	.	. . .	. . .	. .	. .
x_{-3}	y_{-3}						
		Δy_{-3}					
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$				
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$			
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$			
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$				
		Δy_2					
x_3	y_3						
			.		. . .	. . .	. . .

Конечные разности обычно принято записывать в единицах последнего знака соответствующей конечной разности без нулей впереди (табл. 4.8).

Таблица 48

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,70	5,4739	551	4	3
1,71	5,5290	555	7	−3
1,72	5,5845	562	4	
1,73	5,6407	566		
1,74	5,6973			

Рассмотрим некоторые свойства конечных разностей. По определению

$$\Delta y_i = (x_i + \Delta x) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i,$$

а вторая конечная разность в точке x_i есть

$$\Delta^2 y_i = [f(x_{i+1} + \Delta x) - f(x_i + \Delta x)] - [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \\ = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

Выразим третью конечную разность в точке x_i через значения функции:

$$\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i) = [f(x_{i+2} + \Delta x) - 2f(x_{i+1} + \Delta x) + f(x_i + \Delta x)] - \\ - [f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i) = f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + \\ + 3f(x_{i+1}) - f(x_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i.$$

Покажем, что общее выражение для конечной разности n-го порядка имеет вид

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} - \ldots + \\ + (-1)^m C_n^m y_{n+i-m} + \ldots + (-1)^n y_i. \qquad (3)$$

При $n = 1, 2, 3$ формула (3) справедлива. Предположим, что она верна для n-й конечной разности, и докажем ее справедливость для $(n+1)$-й конечной разности:

$$\Delta^{n+1} y_i = \Delta(\Delta^n y_i) = \Delta^n y_{i+1} - \Delta^n y_i = [y_{n+i+1} - C_n^1 y_{n+i} + C_n^2 y_{n+i-1} - \ldots + \\ + (-1)^m C_n^m y_{n+i+1-m} + \ldots + (-1)^n y_{i+1}] - [y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + \\ + C_n^2 y_{n+i-2} - \ldots + (-1)^m C_n^m y_{n+i-m} + \ldots + (-1)^n y_i].$$

Так как

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!} = \\ = \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!} = C_{n+1}^{m+1},$$

то, следовательно,

$$\Delta^{n+1} y_i = y_{n+i+1} - C_{n+1}^1 y_{n+i} + C_{n+1}^2 y_{n+i-1} + \ldots + \\ + (-1)^m C_{n+1}^m y_{n+i+1-m} + \ldots + (-1)^{n+1} y_i,$$

что и требовалось доказать.

Отметим следующие свойства конечных разностей.

1. *Конечная разность $\Delta^n u$ суммы или разности функций $u = \varphi + g$ есть сумма или разность конечных разностей функций:*

$$\Delta^n u_i = \Delta^n (\varphi_i + g_i) = \Delta^n \varphi_i + \Delta^n g_i.$$

2. *При умножении функции на постоянный множитель конечные разности умножаются на тот же множитель.*

3. *Конечная разность m-го порядка от конечной разности n-го порядка равна конечной разности $(m + n)$-го порядка:*

$$\Delta^m (\Delta^n y) = \Delta^{m+n} y.$$

4. *Конечные разности n-го порядка от многочлена степени n постоянны, а конечные разности $(n + 1)$-го порядка равны нулю.*

Следует заметить, что на конечных разностях более высоких порядков заметно сказываются ошибки округления. Пусть одно из значений функции содержит ошибку, равную ε. Из табл. 4.9 видно, что влияние ошибки на конечные разности возрастает с увеличением их порядка.

Таблица 4.9

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
.	. . .	.	. . .	. . .
x_{n-2}	y_{n-2}			
		Δy_{n-2}		
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}+\varepsilon$	
		$\Delta y_{n-1}+\varepsilon$		$\Delta^3 y_{n-2}-3\varepsilon$
x_n	$y_n+\varepsilon$		$\Delta^2 y_{n-1}-2\varepsilon$	
		$\Delta y_n-\varepsilon$		$\Delta^3 y_{n-1}+3\varepsilon$
x_{n+1}	y_{n+1}		$\Delta^2 y_n+\varepsilon$	
		Δy_{n+1}		
x_{n+2}	y_{n+2}			
. . .		. .	. . .	. . .

Пример 1. Составить горизонтальную таблицу конечных разностей функции $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$ от начального значения $x = 0$, приняв шаг $h = 1$.

Решение. Полагая $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., находим соответствующие значения y_0, y_1, y_2, ... :

$$x_0 = 0, \quad y_0 = -1; \quad x_1 = 1, \quad y_1 = 2; \quad x_2 = 2, \quad y_2 = 17;$$

$$x_3 = 3, \quad y_3 = 50; \quad x_4 = 4, \quad y_4 = 107; \quad x_5 = 5, \quad y_5 = 194; \ldots .$$

Найдем конечные разности первого порядка:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 2 + 1 = 3;$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 17 - 2 = 15;$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 50 - 17 = 33;$$

$$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 107 - 50 = 57;$$

$$\Delta y_4 = y_5 - y_4 = 194 - 107 = 87; \ \ldots .$$

Найдем конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 15 - 3 = 12;$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 33 - 15 = 18;$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 57 - 33 = 24;$$

$$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = 87 - 57 = 30; \ \ldots .$$

Определяем конечные разности третьего порядка:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 18 - 12 = 6;$$

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 24 - 18 = 6;$$

$$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = 30 - 24 = 6; \ \ldots .$$

Мы видим, что третьи конечные разности $\Delta^3 y_0$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^3 y_2$, ... постоянны. Это объясняется тем, что функция $f(x)$ есть многочлен третьей степени. Третью конечную разность можно вычислить также по формуле

$$\Delta^n P_n(x) = n!\, a_0 h^n = \mathrm{const},$$

т. е. $\Delta^3 P_3(x) = 3!\, 1 \cdot 1^3 = 6$, а конечные разности четвертого порядка равны нулю.

Составим таблицу конечных разностей (табл. 4.10):

Таблица 4.10

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	−1	3	12	6	0
1	2	15	18	6	0
2	17	33	24	6	
3	50	57	30		
4	107	87			
5	194				

В дальнейшем при вычислениях целесообразно сразу же заносить конечные разности в таблицу.

Пример 2. Найти конечные разности второго порядка для функции, заданной таблично:

x	2	4	6	8	10
y	3,146	4,028	4,911	5,796	6,680

Решение. Составим таблицу конечных разностей, как и в примере 1:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
2	3,146	882	1
4	4,028	883	2
6	4,911	885	1
8	5,796	884	
10	6,680		

§ 4.7. Первая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции

Вычисление значений функции для значений аргумента, лежащих в начале таблицы, удобно проводить, пользуясь первой интерполяционной формулой Ньютона.

Пусть функция $f(x)$ задана значениями

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n)$$

в равноотстоящих узлах интерполяции x_0, $x_1 = x_0 + h$, ..., $x_n = x_0 + nh$. Требуется построить интерполяционный многочлен $P_n(x)$ степени n такой, что

$$P_n(x_0) = y_0,\ P_n(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P_n(x_n) = y_n.$$

В силу единственности многочлена степени n, построенного по $n + 1$ значениям функции $f(x)$, многочлен $P_n(x)$ является разновидностью записи интерполяционного многочлена и в конечном счете совпадает с многочленом, полученным по формуле Лагранжа.

Будем искать полином в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x - x_2) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \quad (1)$$

В этом выражении нам неизвестны коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n. Для того чтобы найти a_0, положим $x = x_0$. Тогда при подстановке $x = x_0$ в выражение (1) все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль, т. е. $P_n(x_0) = a_0$, а значение функции в точке x_0 известно из условия задачи: $P_n(x_0) = y_0$. Следовательно, $a_0 = y_0$.

Чтобы найти коэффициент a_1, составим первую конечную разность для многочлена $P_n(x)$ в точке x. Согласно определению конечной разности, имеем

$$\Delta P_n(x) = P_n(x + h) - P_n(x).$$

Произведя подстановку, получим

$$\Delta P_n(x) = [a_0 + a_1(x-x_0+h) + a_2(x-x_0+h)(x-x_1+h) +$$
$$+ a_3(x-x_0+h)(x-x_1+h)(x-x_2+h) + \ldots + a_n(x-x_0+h) \times$$
$$\times (x-x_1+h)\ldots(x-x_{n-1}+h)] - [a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0) \times$$
$$\times (x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots$$
$$\ldots(x-x_{n-1})] = a_1[(x-x_0+h)-(x-x_0)] + a_2[(x-x_0+h)(x-x_1+h) -$$
$$-(x-x_0)(x-x_1)] + a_3[(x-x_0+h)(x-x_1+h)(x-x_2+h) -$$
$$-(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)] + \ldots + a_n[(x-x_0+h)(x-x_1+h)\ldots$$
$$\ldots(x-x_{n-1}+h) - (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})] = ha_1 + 2ha_2(x-x_0) +$$
$$+ 3ha_3(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + nha_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2}).$$

Вычислим первую конечную разность многочлена $P_n(x)$ в точке x_0. Здесь также все члены, кроме первого, обратятся в нуль, и, следовательно, $\Delta P_n(x_0) = a_1 h$, но

$$\Delta P_n(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0 = \Delta y_0,$$

откуда $\Delta y_0 = a_1 h$ и

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Чтобы определить коэффициент a_2, составим конечную разность второго порядка:

$$\Delta^2 P_n(x) = \Delta P_n(x+h) - \Delta P_n(x).$$

После преобразований получим

$$\Delta^2 P_n(x) = 2!\, h^2 a_2 + 2\cdot 3\cdot h^2 a_3(x-x_0) + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)nh^2 a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-3}).$$

Полагаем $x = x_0$; тогда все члены, кроме первого, опять обратятся в нуль и $\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2! h^2 a_2$. Отсюда

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}.$$

Вычисляя конечные разности более высоких порядков и полагая $x = x_0$, придем к общей формуле для получения коэффициентов:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\, h^i} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

где будем считать, что $0! = 1$ и $\Delta^0 y = y$. Подставив найденные значения коэффициентов a_i в выражение (1), получим *первую интерполяционную формулу Ньютона*

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\, h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad (2)$$

На практике часто используют формулу Ньютона в другом виде. Для этого введем переменную $q = (x - x_0)/h$, где h — шаг интерполяции, а q — число шагов. Тогда первая интерполяционная формула Ньютона примет следующий вид:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{h!}\Delta^n y_0. \tag{3}$$

Формулу (3) удобно использовать для интерполирования в начале отрезка интерполяции $[a, b]$, где q мало по абсолютной величине.

Если за число узлов интерполяции принять $n = 1$, то получим формулу *линейного интерполирования*

$$P(x) = y + q\Delta y_0.$$

При $n = 2$ получим формулу *параболического*, или *квадратичного, интерполирования*

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0.$$

На практике часто бывает необходимо сгустить шаг интерполяции какой-нибудь таблицы с равноотстоящими аргументами. В таблице можно считать, что число узлов интерполяции неограничено. Тогда выбирают n так, чтобы конечная разность $\Delta^n y_i$ была постоянна с заданной степенью точности. За начальное значение x_0 можно выбирать любое значение аргумента.

Пример. В табл. 4.11 даны значения функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Таблица 4.11

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2,0	0,0540	−100	15	−2
2,1	440	−85	13	0
2,2	355	−72	13	−3
2,3	283	−59	10	−10
2,4	224	−49	0	
2,5	175	−49		
2,6	136			

Применяя первую интерполяционную формулу Ньютона, найти φ (2,22).

Решение. Строим конечные разности функции $\varphi(x)$; ограничимся третьей конечной разностью. За x принимаем число, наиболее близкое к заданному, т. е. полагаем $x = 2{,}2$. Так как шаг $h = 0{,}1$, то

$$q = \frac{2{,}22 - 2{,}20}{0{,}1} = \frac{0{,}02}{0{,}1} = 0{,}2.$$

Используя формулу (3), находим

$$y = 0{,}0355 + 0{,}2\,(-0{,}0072) + \frac{0{,}2\,(0{,}2-1)}{2!}\,0{,}0013 + \\ + \frac{0{,}2\,(0{,}2-1)\,(0{,}2-2)}{3!}\,(-0{,}0003) = 0{,}0339.$$

§ 4.8. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Для интерполирования в конце таблицы обычно применяют вторую интерполяционную формулу Ньютона.

Пусть на отрезке $[a, b]$ даны $n+1$ различных значений аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_n$, которым соответствуют значения функции

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n),$$

а шаг интерполяции постоянен и равен h, т. е. $x_{i+1} = x_i + h$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Построим интерполяционный многочлен вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ + a_3(x - x_n)(x - x_n)(x - x_{n-2}) + \ldots \\ \ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1). \tag{1}$$

В этом многочлене неизвестны коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Их надо подобрать так, чтобы были выполнены равенства

$$P_n(x_0) = y_0,\ P_n(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P_n(x_n) = y_n.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i} \quad (i = 0,\ 1, \ldots,\ n). \tag{2}$$

Коэффициент a_0 найдем, положив $x = x_n$ в равенстве (1):

$$P_n(x_n) = y_n = a_0,$$

откуда

$$a_0 = y_n.$$

Из выражения для первой конечной разности найдем a_1:

$$\Delta P_n(x) \equiv 1 \cdot h a_1 + 2h a_2(x - x_{n-1}) + 3h a_3(x - x_{n-2})(x - x_{n-1}) + \ldots \\ \ldots + n h a_n(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})\ldots(x - x_1).$$

Отсюда, полагая $x = x_{n-1}$ и учитывая соотношение (2), имеем

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 h.$$

Следовательно,

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

Из выражения для второй конечной разности найдем a_2:

$$\Delta^2 P_n(x) = 2!\,h^2 a_2 + 2\cdot 3h^2 a_3 (x - x_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + n(n-1)\,h^2 a_n (x - x_1)\ldots(x - x_{n-2}).$$

Полагая $x = x_{n-2}$, получим

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = 2!h^2 a_2,$$

откуда

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}.$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!\,h^i} \quad (i = 0, 1\ 2, \ldots, n).$$

Подставив найденные значения коэффициентов в формулу (1), получим

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!\,h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\,h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_n)\ldots(x - x_1). \qquad (3)$$

Это и есть *вторая интерполяционная формула Ньютона.*

На практике используют формулу Ньютона в другом виде. Положим $q = (x - x_n)/h$; тогда

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1,\quad \frac{x - x_{n-2}}{h} = q + 2, \ldots$$

и формула (3) примет вид

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\,\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\,\Delta^3 y_{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\,\Delta^n y_0. \qquad (4)$$

Первая интерполяционная формула Ньютона используется для интерполирования в начале отрезка $[a, b]$, т. е. для *интерполирования вперед* и *экстраполирования назад*. При интерполировании по первой формуле Ньютона $q = (x - x_0)/h > 0$. При экстраполировании назад также используют первую интерполяционную формулу Ньютона, но в этом случае $q = (x - x_0)/h < 0$.

При интерполировании в конце таблицы, т. е. *интерполировании назад*, когда шаг интерполяции постоянен, используют вторую формулу Ньютона, где $q = (x - x_n)/h < 0$. Вторая интерполяционная формула Ньютона применяется и при *экстраполировании вперед*, тогда $q = (x - x_n)/h > 0$.

Пример. В табл. 4.12 приведены значения интеграла вероятностей:

Таблица 4.12

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,1	0,03983	3943	—78	—36
0,2	0,07926	3865	—114	—33
0,3	0,11791	3751	—147	—28
0,4	0,15542	3604	—175	
0,5	0,19146	3429		
0,6	0,22575			

Требуется вычислить $y(0{,}58)$.

Решение. Здесь шаг интерполяции $h = 0{,}1$. Отсюда

$$q=\frac{x-x_n}{h}=\frac{0{,}58-0{,}6}{0{,}1}=-\frac{0{,}02}{0{,}1}=-0{,}2.$$

Для нахождения $y\,(0{,}58)$ воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона:

$$P_3\,(0{,}58)=0{,}22575+(-0{,}2)\,0{,}03429+\frac{(-0{,}2)\,(-0{,}2+1)}{2!}\,(-0{,}00175)+$$
$$+\frac{(-0{,}2)\,(-0{,}2+1)\,(-0{,}2+2)}{3!}\,(-0{,}00028)=0{,}21904.$$

§ 4.9. Оценки погрешностей интерполяционных формул Ньютона

В § 4.5 мы вывели оценку погрешности для интерполяционной формулы Лагранжа:

$$|R_n\,(x)\,|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_n)\,|.$$

Если узлы интерполяции равноотстоящие, то введя шаг $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) и полагая $q = (x - x_0)/h$, получим *оценку погрешности для первой интерполяционной формулы Ньютона*:

$$R_n\,(x)=h^{n+1}\,\frac{q\,(q-1)\,\ldots\,(q-n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}\,(\xi),\tag{1}$$

где точка ξ принадлежит отрезку интерполяции $[x_0,\ x_n]$. В случае экстраполяции точка ξ находится за пределами отрезка $[x_0,\ x_n]$.

Аналогичным образом *для второй интерполяционной формулы Ньютона* с равноотстоящими узлами интерполяции, полагая $q = (x - x_n)/h$, получим *оценку погрешности* в следующем виде:

$$R_n\,(x)=h^{n+1}\,\frac{q\,(q+1)\,\ldots\,(q+n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}\,(\xi),\tag{2}$$

где точка ξ также принадлежит отрезку интерполяции $[x_0,\ x_n]$.

В практических расчетах аналитический вид функции не всегда известен. Тогда для оценки точности составляют таблицу конечных разностей, и останавливаются на тех, которые можно считать постоянными в пределах заданной точности.

Воспользовавшись предельным переходом

$$f^{(n+1)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}},$$

приближенно считают

$$f^{(n+1)}(\xi)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}.$$

Тогда погрешность для первой интерполяционной формулы Ньютона

$$R_n(x)\approx\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_0, \tag{1'}$$

а для второй интерполяционной формулы Ньютона

$$R_n(x)\approx\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_n. \tag{2'}$$

Пример. Функция $y=\ln x$ задана таблично:

x	2	3	4
y	0,6931	1,0986	0,3863

Построить первый интерполяционный многочлен Ньютона и оценить погрешность интерполирования в точке $x=2,5$.

Решение. Составим таблицу конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
2	0,6931	0,4055	−0,1178
3	1,0986	0,2877	
4	1,3863		

Учитывая что $h=1$, по формуле (2) § 4.7 получим

$$P_2(x)=0,6931+0,4055(x-2)-\frac{0,1178}{2}(x-2)(x-3)=$$

$$=-0,0586x^2+0,7000x-0,4713.$$

Оценим наибольшее значение третьей производной функции $y=\ln x$ на отрезке $[2,\ 4]$:

$$M_3=\max_{2\leqslant x\leqslant 4}|y'''|=\max_{2\leqslant x\leqslant 4}\left|\frac{2!}{x^3}\right|=\frac{1}{4}.$$

Так как $h=1$, то $q=(2,5-2)/h=0,5$. Вычислим произведение

$$|q(q-1)(q-2)|=|0,5\cdot 0,5\cdot 1,5|=0,375.$$

По формуле (1) находим

$$|R_2(2,5)|\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{0,375}{3!}\approx 0,0156.$$

§ 4.10. Единственность интерполяционного многочлена

Мы рассмотрели параболическое интерполирование, когда в качестве интерполяционной функции выбирается многочлен степени не выше n, для функции, заданной $n+1$ значениями в узлах интерполяции. Многочлен $F(x)$ степени n есть единственное разложение в классе степенных функций, так как если бы существовал еще один интерполяционный многочлен $\widetilde{F}(x)$ степени n, принимающий в узлах интерполяции заданные значения, то разность этих многочленов обращалась бы в нуль в $n+1$ узлах интерполяции. Но разность $F(x)-\widetilde{F}(x)$ является многочленом степени не выше n, следовательно, этот многочлен тождественно равен нулю.

Итак, если функция $f(x)$ задана $n+1$ значениями

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n)$$

в несовпадающих узлах интерполяции, то это означает, что существует единственный многочлен $F(x)$ степени n, принимающий в узлах интерполяции заданные значения

$$y_0 = F(x_0),\ y_1 = F(x_1),\ \ldots,\ y_n = F(x_n).$$

Выведенные формулы Ньютона и формула Лагранжа являются лишь различными формами записи одного и того же многочлена n-й степени.

§ 4.11. Интерполирование в таблицах

При интерполировании в таблицах обычно пользуются линейной или квадратичной интерполяцией.

В случае линейной интерполяции значение функции в точке, отличной от узлов интерполяции, определяется по двум известным значениям табулируемой функции $y_i = f(x_i)$, $y_{i+1} = f(x_{i+1})$ в узлах интерполяции x_i и x_{i+1}, между которыми расположено интересующее нас значение аргумента $x_i < x < x_{i+1}$.

Интерполяционная формула Лагранжа для линейной интерполяции примет вид

$$L_1(x) = y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$

а первая интерполяционная формула Ньютона

$$P_1(x) = y_i + \frac{\Delta y_i}{h}(x-x_i),$$

где $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ — первая конечная разность в точке x_i, а $h = x_{i+1} - x_i$ — шаг интерполяции.

Итак, для получения приближенного значения функции y по формуле Ньютона достаточно к табличному значению y_i прибавить поправку, равную $\Delta y_i(x-x_i)/h$.

Пример 1. Вычислить, сколько градусов содержится в радианной мере 0,222.

Р е ш е н и е. Воспользуемся таблицей

Радианы	Градусы
0,22	12,605
23	13,178
24	13,751

Для линейной интерполяции достаточно рассмотреть данные первых двух строк. Составим табличную разность

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = 13,178 - 12,605 = 0,573.$$

Шаг таблицы $h = 0,01$, $x - x_i = 0,222 - 0,220 = 0,002$. Подсчитаем поправку

$$\frac{\Delta y_i}{h}(x - x_i) = \frac{0,573}{0,01} \cdot 0,002 = 0,1146$$

и прибавим ее к табличному значению:

$$y = 12,605 + 0,1146 = 12,7196.$$

Округляя результат, получим $y = 12,720$.

Оценим погрешность при замене точного значения функции $f(x)$ ее приближенным значением, т. е. $y_i + \frac{\Delta y_i}{h}(x - x_i)$. Функция погрешности имеет следующий вид:

$$r(x) = f(x) - y_i - \frac{\Delta y_i}{h}(x - x_i).$$

Оценим погрешность на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Предположим, что вторая производная функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ непрерывна и ограничена: $|f''(x)| \leqslant M_2$. Дифференцируя функцию $r(x)$, получим

$$r'(x) = f'(x) - \frac{\Delta y_i}{h}, \quad r''(x) = f''(x).$$

Следовательно, $|r''(x)| \leqslant M_2$. Кроме того, по условию задачи в узлах x_i и x_{i+1} интерполяционный многочлен совпадает со значениями функции, значит, $r(x_i) = r(x_{i+1}) = 0$.

В некоторой точке ξ интервала (x_i, x_{i+1}) функция ошибки $r(x)$ достигает своего наибольшего значения. Разложим $r(x)$ в ряд Тейлора в окрестности этой точки. Тогда

$$r(x) = r(\xi) + r'(\xi)(x - \xi) + \frac{r''(\xi)}{2}(x - \xi)^2.$$

Так как в точке ξ функция $r(x)$ достигает наибольшего значения, то производная $r'(\xi)$ обращается в нуль. Следовательно,

$$r(x) = r(\xi) + \frac{r''(\xi)}{2}(x-\xi)^2.$$

В качестве точки x выберем ближайший к ξ узел интерполяции x_i или x_{i+1}. Обозначим эту точку через $\bar{x}$. Так как в узле интерполяции $r(x)$ обращается в нуль, то

$$0 = r(\xi) + \frac{r''(\xi)}{2}(\bar{x}-\xi)^2; \quad \text{или } r(\xi) = -\frac{r''(\xi)}{2}(\bar{x}-\xi)^2.$$

Так как разность $\bar{x} - \xi$ не превышает половины отрезка $[x_i, x_{i-1}]$ (по условию выбора $\bar{x}$ — ближайший к точке ξ узел интерполяции), а $|r''(\xi)| \leqslant M_2$ (вторая производная данной функции ограничена), получаем следующую формулу оценки погрешности для линейной интерполяции:

$$r(\xi)| \leqslant \frac{|r''(\xi)|}{2} \cdot \frac{h^2}{4} \leqslant \frac{M_2 h^2}{8}.$$

В силу того, что $|r(x)| \leqslant r(\xi)$ на всем отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, окончательно получим оценку погрешности для линейной интерполяции:

$$|r(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{8}.$$

В случае квадратичной интерполяции необходимо знать три значения табулируемой функции $y_{i-1} = f(x_{i-1})$, $y_i = f(x_i)$ и $y_{i+1} = f(x_{i+1})$ в узлах интерполяции x_{i-1}, x_i и x_{i+1}. Тогда формула Лагранжа примет вид

$$L_2(x) = y_{i-1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} + y_i\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} + y_{i+1}\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)},$$

а первая интерполяционная формула Ньютона

$$P_2(x) = y_{i-1} + \frac{\Delta y_{i-1}}{h}(x-x_{i-1}) + \frac{\Delta^2 y_{i-1}}{2h^2}(x-x_{i-1})(x-x_i).$$

Пример 2. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $y = \ln x$ с узлами интерполяции $x = 2$, $x = 3$ и $x = 4$. Оценить погрешность интерполирования при $x = 2{,}5$.

Решение. Имеем

x	2	3	4
y	0,6931	1,0986	1,3863

Следовательно,

$$L_2(x)=0,6931\frac{(x-3)(x-4)}{(-1)(-2)}+1,0986\frac{(x-2)(x-4)}{1\cdot(-1)}+$$

$$+1,3863\frac{(x-2)(x-3)}{2\cdot 1}=-0,0586x^2+0,7000x-0,4713.$$

Как и следовало ожидать (в силу единственности интерполяционного многочлена), мы получили тот же результат, что и при интерполировании с помощью многочлена Ньютона (ср. с примером в § 4.9).

Оценку погрешности найдем по формуле

$$|R_2(x)|\leqslant\frac{M_3}{3!}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|.$$

Наибольшее значение третьей производной $f'''(x)$ на отрезке [2, 4] достигается в точке 2, т. е.

$$M_3=\max_{2\leqslant x\leqslant 4}|f'''(x)|=\max_{2\leqslant x\leqslant 4}\left|\frac{2}{x^3}\right|=\frac{1}{4}.$$

Вычислим

$$|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|=|(2,5-2)(2,5-3)(2,5-4)|=0,375.$$

Тогда

$$R_2(2,5)\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{0,375}{3!}=0,0156.$$

§ 4.12. Линейное интерполирование по Эйткину

В тех случаях, когда нет необходимости в отыскании приближенного аналитического выражения функции $y=f(x)$, заданной таблично, а требуется лишь определить значение функции в точке, отличной от узла интерполяции, удобно использовать последовательную *линейную интерполяцию по Эйткину.*

Интерполяционная схема Эйткина особенно удобна при работе с таблицами, когда априорно фиксируется погрешность результата.

Вычисление значения функции в точке, отличной от узлов интерполяции, начинается с вовлечения в счет двух узлов интерполяции с последующим включением в схему новых узлов интерполяции.

Процесс счета состоит в следующем. Пусть некоторый интерполяционный многочлен $F(x)$ степени n принимает в узлах интерполяции $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения

$$y_0=F_0(x),\ y_1=F(x_1),\ \ldots,\ y_n=F(x_n).$$

Воспользуемся формулой Лагранжа для случая линейной интерполяции. На отрезке $[x_0, x_1]$ интерполяционное значение функции можно вычислить по формуле

$$F_{0,1}(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{\begin{vmatrix}y_0 & x_0-x\\ y_1 & x_1-x\end{vmatrix}}{x_1-x_0},\qquad (1)$$

на отрезке $[x_1, x_2]$ — по формуле

$$F_{1,2}(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

и, наконец, на отрезке $[x_0, x_2]$ — по формуле

$$F_{0,2}(x) = y_0 \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}. \qquad (3)$$

Далее, заменим y_0 и y_2 в формуле (3) соответственно на $F_{0,1}(x)$ и $F_{1,2}(x)$ и получим следующее выражение:

$$F_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_{0,1}(x) & x_0 - x \\ F_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}. \qquad (4)$$

Раскрывая в последнем выражении определитель, непосредственно убеждаемся, что $F_{0,1,2}(x)$ — это многочлен второй степени, принимающий в узлах интерполяции x_0, x_1, x_2 соответствующие табличные значения:

$$(x_0) = y_0, \quad F(x_1) = y_1, \quad F(x_2) = y_2.$$

Итак, применяя линейную интерполяцию к $F_{0,1}(x)$ и $F_{0,2}(x)$, мы получили интерполяционный многочлен второй степени $F_{0,1,2}(x)$. Тот же самый результат можно получить, воспользовавшись двумя другими формулами:

$$F_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_{0,1}(x) & x_1 - x \\ F_{0,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}; \qquad F_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} F_{0,2}(x) & x_0 - x \\ F_{1,2}(x) & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}. \qquad (5)$$

Методом математической индукции можно показать, что интерполяционный многочлен степени n, построенный по $n + 1$ узлам, получается посредством линейной интерполяции, примененной к двум различным интерполяционным полиномам $(n - 1)$-й степени, каждый из которых построен по каким-либо n узлам из числа данных.

Пример. Пользуясь схемой Эйткина, вычислить значение sin 0,674 для функции $y = \sin x$:

x_i	$x_0 = 0,66$	$x_1 = 0,67$	$x_2 = 0,68$
$y_i = \sin x_i$	$y_0 = 0,61312$	$y_1 = 0,62099$	$y_2 = 0,62879$

Решение. Согласно формулам (1) и (2) имеем

$$F_{0,1}(0,674) = \frac{\begin{vmatrix} 0,61312 & 0,66 - 0,674 \\ 0,62099 & 0,67 - 0,674 \end{vmatrix}}{0,67 - 0,66} = 0,625730;$$

$$F_{1,2}(0,674)=\frac{\begin{vmatrix}0,62099 & 0,67-0,674\\ 0,62879 & 0,68-0,674\end{vmatrix}}{0,68-0,67}=0,625643.$$

Тогда по формуле (4) находим

$$F_{0,1,2}(0,674)=\frac{\begin{vmatrix}0,625730 & 0,66-0,674\\ 0,625643 & 0,68-0,674\end{vmatrix}}{0,68-0,66}=0.625676.$$

Следовательно, sin 0,676 = 0,62568.

§ 4.13. Разделенные разности

В предыдущих параграфах были рассмотрены формулы Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции, где коэффициенты многочлена a_0, a_1, a_2, ..., a_n найдены с использованием конечных разностей.

При проведении приближенных вычислений, когда значения функции задаются в неравноотстоящих узлах интерполяции, вводят понятие *разделенной разности*, обобщающее понятие конечной разности.

Пусть функция $y = f(x)$ задана своими значениями

$$y_0=f(x_0),\quad y_1 = f(x_1),\quad \ldots,\quad y_n = f(x_n)$$

в неравноотстоящих узлах интерполяции x_0, x_1, ..., x_n. Отношения

$$[x_0;\ x_1]=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\quad [x_1;\ x_2]=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ldots,\quad [x_i;\ x_{i+1}]=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$$

назовем *разделенными разностями первого порядка.*

Определим *разделенные разности второго порядка* как следующие отношения:

$$[x_0;\ x_1;\ x_2]=\frac{[x_1;\ x_2]-[x_0;\ x_1]}{x_2-x_0},$$

$$[x_1;\ x_2;\ x_3]=\frac{[x_2;\ x_3]-[x_1;\ x_2]}{x_3-x_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2}]=\frac{[x_{i+1};\ x_{i+2}]-[x_i;\ x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}.$$

Зная разделенную разность $(k-1)$-го порядка $[x_i;\ x_{i+1};\ \ldots$ $\ldots;\ x_{i+k-1}]$, можно определить *разделенную разность k-го порядка* следующим образом:

$$[x_i;\ x_{i+1};\ldots;\ x_{i+k}]=\frac{[x_{i+1};\ x_{i+2};\ldots;\ x_{i+k}]-[x_i;\ x_{i+1};\ldots;\ x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}.$$

Иногда разделенные разности первого порядка обозначают так:

$$f(x_0;\ x_1),\ f(x_1;\ x_2),\ \ldots,\ f(x_i;\ x_{i+1}),$$

разделенную разность второго порядка соответственно

$$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2}),$$

тогда для разделенной разности k-го порядка в общем случае используют выражение

$$f(x_i;\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_{i+k}).$$

Составим диагональную таблицу разделенных разностей (табл. 4.13).

Таблица 4.13

x_i	$y_i = f(x_i)$	$[x_i;\ x_{i+1}]$	$[x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2}]$	$[x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2};\ x_{i+3}]$	$[x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2};\ x_{i+3};\ x_{i+4}]$
x_0	y_0				
		$[x_0;\ x_1]$			
x_1	y_1		$[x_0;\ x_1;\ x_2]$		
		$[x_1;\ x_2]$		$[x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3]$	
x_2	y_2		$[x_1;\ x_2;\ x_3]$		$[x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4]$
		$[x_2;\ x_3]$		$[x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4]$	
x_3	y_3		$[x_2;\ x_3;\ x_4]$		
		$[x_3;\ x_4]$			
x_4	y_4				

Пример. Составить таблицу разделенных разностей для следующих значений x и y:

x	0	1	5	10
y	10	20	100	1100

Решение. Пользуясь непосредственно определением, находим разделенные разности первого порядка:

$$[x_0;\ x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{20 - 10}{1 - 0} = 10;$$

$$[x_1;\ x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 20}{5 - 1} = \frac{80}{4} = 20;$$

$$[x_2;\ x_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{1100 - 100}{10 - 5} = \frac{1000}{5} = 200.$$

Аналогично найдем разделенные разности второго порядка:

$$[x_0;\ x_1;\ x_2] = \frac{[x_1;\ x_2] - [x_0,\ x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{20 - 10}{5 - 0} = 2;$$

$$[x_1;\ x_2;\ x_3]=\frac{[x_2;\ x_3]-[x_1;\ x_2]}{x_3-x_1}=\frac{200-20}{10-1}=\frac{180}{9}=20.$$

Разделенная разность третьего порядка

$$[x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3]=\frac{[x_1;\ x_2;\ x_3]-[x_0;\ x_1;\ x_2]}{x_3-x_0}=\frac{20-2}{10}=1{,}8.$$

Результаты вычислений сведем в диагональную таблицу разделенных разностей

x	y	$[x_i,\ x_{i+1}]$	$[x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}]$	$[x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2},\ x_{i+3}]$
0	10			
		10		
1	20		2	
		20		1,8
5	100		20	
		200		
10	1100			

§ 4.14. Первая интерполяционная формула Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции

Пусть функция $f(x)$ задана значениями

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ \ldots,\ y_n=f(x_n)$$

в неравноотстоящих узлах интерполяции $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n$. Требуется построить интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции, так чтобы в узлах интерполяции

$$y_0=P(x_0),\ y_1=P(x_1),\ \ldots,\ y_n=P(x_n).$$

Построим первую разделенную разность

$$[x;\ x_0]=\frac{P(x)-P(x_0)}{x-x_0},$$

тогда

$$P(x)=P(x_0)+[x;\ x_0](x-x_0). \quad (1)$$

Вторая разделенная разность

$$[x;\ x_0;\ x_1]=\frac{[x;\ x_0]-[x_0;\ x_1]}{x-x_1},$$

откуда

$$[x;\ x_0] = [x_0;\ x_1] + [x;\ x_0;\ x_1]\,(x - x_1). \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в (1), получим

$$P(x) = P(x_0) + [x_0;\ x_1]\,(x - x_0) + [x;\ x_0;\ x_1]\,(x - x_0)(x - x_1). \tag{3}$$

Из определения третьей разделенной разности получим

$$[x;\ x_0;\ x_1;\ x_2] = \frac{[x;\ x_0;\ x_1] - [x_0;\ x_1;\ x_2]}{x - x_2},$$

т. е.

$$[x;\ x_0;\ x_1] = [x_0;\ x_1;\ x_2] + [x;\ x_0;\ x_1;\ x_2]\,(x - x_2). \tag{4}$$

Подставим вторую разделенную разность (4) в выражение (3), тогда, используя третью разделенную разность, можно представить многочлен $P(x)$ в следующем виде:

$$P(x) = P(x_0) + [x_0;\ x_1]\,(x - x_0) + [x_0;\ x_1;\ x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) + \\ + [x;\ x_0;\ x_1;\ x_2]\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \tag{5}$$

Продолжая далее этот процесс, получим

$$P(x) = P(x_0) + [x_0;\ x_1](x - x_0) + [x_0;\ x_1;\ x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ \ldots + [x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \tag{6}$$

Эта формула носит название *интерполяционного многочлена Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции.*

Преимущество этой формулы по сравнению с формулой Лагранжа состоит в том, что добавление новых узлов интерполяции не приводит к проведению расчетов заново.

§ 4.15. Интерполяционные формулы Гаусса

Введем понятие *центральной разности*, для которой

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\quad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,\ \ldots$$

при $x_i = x_0 + ih$ (где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Таблица центральных разностей приведена на стр. 198 (см. табл. 4.14).

При интерполировании в середине таблицы пользуются интерполяционными формулами Гаусса.

Первая интерполяционная формула Гаусса записывается следующим образом:

$$P(x) = y_0 + q\,\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \\ + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots \\ \ldots + \frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\ldots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \tag{1}$$

где $\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}$ — центральная разность $(2n-1)$-го порядка в точке x_{-n}, а $q = (x - x_0)/h$ — число шагов.

Таблица 4.14

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_{-3}	y_{-3}					
		Δy_{-3}				
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$			
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$	
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$			
		Δy_2				
x_3	y_3					

В первой интерполяционной формуле Гаусса используются центральные разности

$$\Delta y_0, \quad \Delta^2 y_{-1}, \quad \Delta^3 y_{-1}, \quad \Delta^4 y_{-2}, \ \ldots,$$

которые расположены в строке x_0 и в следующей за ней строке.

Во второй интерполяционной формуле Гаусса рассматриваются центральные разности из строки x_0 и из строки, расположенной над ней:

$$\Delta y_{-1}, \quad \Delta^2 y_{-1}, \quad \Delta^3 y_{-2}, \quad \Delta^4 y_{-2}, \ldots .$$

Эта формула имеет вид

$$P(x) = y_0 + q\,\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)\,q}{2!}\,\Delta^2 y_{-1} +$$

$$+ \frac{(q+1)\,q\,(q-1)}{3!}\,\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)\,q\,(q-1)}{4!}\,\Delta^4 y_{-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(q+n-1)\,\ldots\,(q-n-1)}{(2n-1)!}\,\Delta^{2n-1}\,y_{-n} +$$

$$+ \frac{(q+n)(q+n-1)\,\ldots\,(q-n+1)}{(2n)!}\,\Delta^{2n}\,y_{-n}. \qquad (2)$$

Оценки погрешности для формул Гаусса таковы:

$$R_{2n} \approx \frac{\Delta^{2n+1} y_{-1}}{(2n+1)!} q (q^2-1^2) \dots (q^2-n^2) \tag{3}$$

и

$$R_{2n-1} \approx \frac{\Delta^{2n} y_0}{(2n)!} q (q^2-1^2)(q^2-2^2) \dots [q^2-(n-1)^2](q+n). \tag{4}$$

Пример. Для функции $y = f(x)$, заданной таблично, найти значение в точке $x = 4{,}5$:

x	3	4	5	6
y	9	16	30	72

Решение. Так как требуется определить значение функции в точке, близкой к середине отрезка интерполяции, то для вычислений следует воспользоваться одной из формул Гаусса. Составим таблицу центральных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3	9			
		7		
4	16		7	
		14		21
5	30		28	
		42		
6	72			

Пользуясь первой интерполяционной формулой Гаусса, найдем приближенное значение функции в точке $x = 4{,}5$:

$$P(x) = y_0 + q\,\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\,\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\,\Delta^3 y_{-1},$$

т. е.

$$P(4{,}5) = 16 + 0{,}5 \cdot 14 + \frac{0{,}5(-0{,}5)}{2!} \cdot 7 + \frac{1{,}5 \cdot 0{,}5(-0{,}5)}{3!} \cdot 21 \approx 20{,}81.$$

§ 4.16. Интерполирование с помощью многочленов Чебышева

В § 4.5 мы вывели оценку погрешности для интерполяционной формулы Лагранжа

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|,$$

где величина $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$ зависит от свойств функции $f(x)$, а сомножитель

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)\ (x - x_1)\ \dots\ (x - x_n)$$

определяется только выбором узлов интерполяции x_i.

Поставим следующую задачу: как следует расположить узлы интерполяции, чтобы абсолютная погрешность метода интерполирования на отрезке $[a, b]$ была наименьшей? Будем считать для определенности, что отрезок интерполирования совпадает с отрезком $[-1, 1]$.

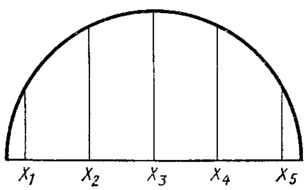


Рис. 4.2

Произведем замену переменной $x = \cos\theta$; функция $f(x)$ становится теперь функцией угла θ, т. е. $f(\cos\theta) = \varphi(\theta)$, и преобразуется в периодическую функцию от нового аргумента. Так как $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то можно считать, что угол θ изменяется от 0 до π. Замена θ на $-\theta$ оставляет x без изменения. Следовательно, функция $\varphi(\theta)$ определена и на отрезке $[-\pi, 0]$. Кроме того, функция $\varphi(\theta)$ четная, т. е. $\varphi(-\theta) = \varphi(\theta)$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема по x, то и функция $\varphi(\theta)$ дифференцируема по θ в каждой точке промежутка $[-\pi, \pi]$, включая границы.

Функцию $\varphi(\theta)$, так же как и $f(x)$, можно разложить в ряд Фурье. Разложение $\varphi(\theta)$ в ряд Фурье имеет вид

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos k\theta.$$

Вернемся теперь к заданному аргументу, т. е. заменим $\cos k\theta$ на x. Мы получим так называемые *многочлены Чебышева* $T_n(x)$. Они представляют попеременно четные и нечетные функции от x и могут быть получены на основании рекуррентной формулы

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{1}$$

с начальными условиями $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$. Нетрудно проверить, что

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,\quad T_3(x) = 4x^3 - 3x,\quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots .$$

Тогда разложение $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x), \tag{2}$$

где

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi(\theta) \cos k\theta\, d\theta.$$

Возвращаясь к переменной x, имеем

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (3)$$

В результате получаем разложение вида

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 T_1(x) + \ldots + a_n T_n(x) + \ldots . \qquad (4)$$

Этот ряд сходится быстрее, чем многочлен Лагранжа.

Узлы интерполяции выбирают следующим образом. Задаются значениями функции y_m в точках $\theta_m = m\pi/n$ ($m = 0, 1, \ldots, n$), т. е. для переменной x эти точки должны располагаться по закону $x_m = \cos(m\pi/n)$. Отсюда видно, что узлы интерполяции располагаются неравномерно, сгущаясь к концам отрезка $[-1, 1]$; рис. 4.2. Значения функции в узлах интерполяции таковы:

$$y_m = f(x_m) = f\left(\cos m \frac{\pi}{n}\right),$$

где $m = 0, 1, \ldots, n$.

§ 4.17. Обратное интерполирование

Задача *обратного интерполирования* заключается в следующем. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \ldots, \quad y_n = f(x_n).$$

Требуется по заданному значению функции $f(x)$ найти соответствующее значение аргумента x.

Случай неравноотстоящих узлов интерполяции. В случае неравноотстоящих узлов интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ задача легко решается с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа. Для этого достаточно принять y за независимую переменную, а x считать функцией, т. е.

$$x = x_0 \frac{(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\ldots(y_0-y_n)} + x_1 \frac{(y-y_0)(y-y_2)\ldots(y-y_n)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)\ldots(y_1-y_n)} + \ldots$$
$$\ldots + x_n \frac{(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)\ldots(y_n-y_{n-1})},$$

или сокращенно

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\ldots(y-y_n)}{(y_i-y_0)(y_i-y_1)\ldots(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\ldots(y_i-y_n)}. \qquad (1)$$

Оценка остаточного члена в этом случае такая же, как и при прямом интерполировании, только производные от данной функции заменяются производными от обратной функции.

Случай равноотстоящих узлов интерполяции. Здесь обычно используется метод последовательных приближений. Если задана монотонная функция с равным шагом интерполяции и данное значение $\bar{x}$ лежит в начале таблицы на отрезке $x_0 < \bar{x} < x_1$, то можно воспользоваться первой интерполяционной формулой Ньютона (см. § 4.7).

Запишем эту формулу в виде

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1) \ldots (q-n+1). \quad (2)$$

Формула (2) связывает значение функции y с числом шагов q. В свою очередь, величина q есть функция аргумента x:

$$q = \frac{x - x_0}{h}. \quad (3)$$

Из этого соотношения, можно определить x, если известно число шагов q:

$$x = x_0 + qh. \quad (4)$$

Величина q определяется методом последовательных приближений как предел последовательности: $q = \lim\limits_{i \to \infty} q_i$, где $q_i = \varphi(q_{i-1})$ $(i = 1, 2, ..)$.

В уравнении (2) выделим q во втором члене правой части равенства и получим

$$q = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2! \Delta y_0} q(q-1) - \ldots - \frac{\Delta^n y_0}{n! \Delta y_0} q(q-1) \ldots (q-n+1). \quad (5)$$

В качестве исходного значения q возьмем $q_0 = (y - y_0)/\Delta y_0$. Тогда

$$q_1 = q_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2! \Delta y_0} q_0(q_0-1) - \ldots - \frac{\Delta^n y_0}{h! \Delta y_0} q_0(q_0-1) \ldots (q_0-n+1). \quad (6)$$

По найденному значению q_1 вычислим второе приближение q_2 и т. д. Для i-го приближения имеем

$$q_i = q_{i-1} - \frac{\Delta^2 y_0}{2! \Delta y_0} q_{i-1}(q_{i-1}-1) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\Delta^n y_0}{n! \Delta y_0} q_{i-1}(q_{i-1}-1) \ldots (q_{i-1}-n+1). \quad (7)$$

Количество членов в формуле (7) зависит от числа узлов интерполяции.

На практике процесс итераций продолжают до тех пор, пока не установятся цифры, соответствующие требуемой точности, причем полагают $q \approx q_m$, где q_m — последнее из найденных приближений. Пользуясь формулой (4), находят искомое значение x, соответствующее заданному значению y.

Нахождение корней методом обратного интерполирования. Методом обратного интерполирования можно воспользоваться для нахождения корней уравнения $f(x) = 0$. Известно, что функция $f(x)$ имеет по крайней мере один корень на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна и

$f(a)\cdot f(b) < 0$. Воспользовавшись этим фактом, по заданной таблице находим такой отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, что $f(x_i)\cdot f(x_{i+1}) < 0$, т. е. $y_i \cdot y_{i+1} < 0$. Применяя затем прием обратного интерполирования, с заданной степенью точности находим значение x, соответствующее $y = 0$.

Пример 1. Функция $y = f(x)$ задана таблично:

x	10	15	17	20
y	3	7	11	17

Найти значение аргумента x, для которого $y = 10$.

Решение. По формуле (1) находим

$$x=\varphi(10)=10\cdot\frac{(10-7)(10-11)(10-17)}{(3-7)(3-11)(3-17)}+15\cdot\frac{(10-3)(10-11)(10-17)}{(7-3)(7-11)(7-17)}+$$
$$+17\cdot\frac{(10-3)(10-7)(10-17)}{(11-3)(11-7)(11-17)}+20\cdot\frac{(10-3)(10-7)(10-11)}{(17-3)(17-7)(17-11)}=$$
$$=10\cdot\frac{3(-1)(-7)}{-4(-8)(-14)}+15\cdot\frac{7(-1)(-7)}{4(-4)(-10)}+17\cdot\frac{7\cdot3\cdot(-7)}{8\cdot4\cdot(-6)}+$$
$$+20\cdot\frac{7\cdot3\cdot(-1)}{14\cdot10\cdot6}=-\frac{15}{32}+\frac{147}{32}+\frac{17\cdot49}{64}-\frac{1}{2}=\frac{1065}{64}=16{,}64.$$

Пример 2. Функция $y = f(x)$ задана таблично:

x	1,0	1,2	1,4
y	35	55	63

При каком значении x значение y равно 40?

Решение. Составим таблицу конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1,0	35	20	−12
1,2	55	8	
1,4	63		

За начальное значение y принимаем $y_0 = 35$. Отсюда

$$q_0=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}=\frac{40-35}{20}=0{,}25.$$

Далее, пользуясь методом итерации, найдем

$$q_1=q_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,\Delta y_0}q_0(q_0-1)=0{,}25-\frac{-12}{2\cdot20}\cdot0{,}25(-0{,}75)=0{,}25-0{,}056=0{,}194;$$

$$q_2=q_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,\Delta y_0}q_1(q_1-1)=0{,}25-0{,}3\cdot0{,}194\cdot0{,}806=0{,}25-0{,}047=0{,}203;$$

$$q_3 = q_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,\Delta y_0} q_2 (q_2 - 1) = 0{,}25 - 0{,}3 \cdot 0{,}203 \cdot 0{,}797 = 0{,}25 - 0{,}049 = 0{,}201;$$

$$q_4 = q_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,\Delta y_0} q_3 (q_3 - 1) = 0{,}25 - 0{,}3 \cdot 0{,}201 \cdot 0{,}799 = 0{,}25 - 0{,}049 = 0{,}201.$$

Теперь по формуле (4) получаем

$$x = x_0 + qh = 1{,}0 + 0{,}201 \quad 0{,}2 = 1{,}04.$$

Упражнения

1 Функция $y = f(x)$ задана таблично:

x	1,522	1,523	1,524
y	20,477	20 906	21,354

Определить ее значение в точке $x = 1{,}5228$ с помощью первой интерполяционной формулы Ньютона

Ответ 20,819

2. Функция $y = f(x)$ задана таблично:

x	1,529	1,530	1,531
y	23,911	24,498	25,115

Определить ее значение в точке $x = 1{,}5303$, пользуясь второй интерполяционной формулой Ньютона.

Ответ 24,680.

3 Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблично:

x	—2	—1	2	3
y	—12	—8	3	5

Ответ $L_3(x) = -\frac{1}{15}x^3 - \frac{3}{20}x^2 + \frac{241}{60}x - 3{,}9.$

4. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x) = e^{-x}$, если узлами интерполяции служат точки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Оценить погрешность при $x = 1{,}5$.

Ответ $L_2(x) = 0{,}0735x^2 - 0{,}4530x + 0{,}7474$; $R_2(1{,}5) = 0{,}23 \cdot 10^{-1}$.

5. Составить таблицу конечных разностей для функции, заданной таблично:

x	—2	—1	0	1	2	3
y	10	5	1	—15	—50	—100

6. Составить таблицу разделенных разностей для функции, заданной таблично.

x	—3	1	0	2	3
y	—15	—7	1	25	47

7. Для функции $y = f(x)$, заданной таблично:

x	1,03	1,08	1,016	1,23	1,26	1,33	1,39
y	2,80107	2,94468	3,18993	3,42123	3,52542	3,78104	4,01485

вычислить значение в точке $x = 1{,}21555$ с точностью до 10^{-5}, пользуясь формулой Эйткина

Ответ: 3,37215.

8. Вычислить значение функции в точке $x = 1{,}34627$, пользуясь формулой Гаусса, если функция $y = f(x)$ задана таблично:

x	1,335	1,340	1,345	1,350	1,355	1,360
y	4,16206	4,25562	4,35325	4,45522	4,56184	4,67344

Ответ: 4,379.

9. Для функции, заданной таблично:

x	1,435	1,440	1,445
y	0,892687	0,893698	0,894700

определить значение аргумента, соответствующее значению функции 0,892914.

Ответ 1,43612

10. Методом обратного интерполирования найти с точностью до 10^{-5} корень уравнения $\sqrt{x+1} - \frac{1}{x} = 0$, лежащий в интервале $0{,}7 \leqslant x \leqslant 0{,}8$.

Ответ: 0,75487.

11. Расходы государственного бюджета СССР на социально-культурные мероприятия представлены таблицей:

Годы	1940	1950	1960	1970
Расходы на социально-культурные мероприятия (в млрд. руб.)	4,1	11,7	24,9	58

Каковы были расходы государственного бюджета СССР на социально-культурные мероприятия в 1969 г.?

12. Расходы по государственному бюджету СССР на выплату пособий многодетным и одиноким матерям представлены таблицей:

Годы	1940	1950	1960
Выплата пособий (в млн. руб.)	123	366	496

Обработать математически данную информацию, представив табулированную функцию интерполяционным многочленом Ньютона.

13. Удельный вес электровозной тяги в грузообороте железнодорожного транспорта (в %) представлен таблицей

Годы	1940	1965	1970	1971
Уд. вес электровозной тяги	2,0	39,5	48,7	49,6

Построить интерполяционный многочлен Лагранжа.

14. Оборот внешней торговли развивающихся стран (по годам) задан следующим образом:

Годы	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Оборот внешней торговли	74	80	82	90	100	107

Составить таблицу конечных разностей.

15. Численность рабочих и служащих, занятых в электроэнергетике, представлена таблицей:

Годы	1966	1967	1968	1969
Численность рабочих и служащих (в тыс. чел.)	581	602	625	635

Методом экстраполяции определить (ориентировочно) численность рабочих и служащих в электроэнергетике на 1970 г.

16. Производство электротары в СССР в 1966—1968 г. представлено в таблице:

Годы	1966	1968	1969
Производство электротары (в тыс. шт.)	17	21	23

Обработать математически данную информацию, представив табулированную зависимость аналитической.

17. Задан по годам выпуск продукции легкой промышленности, товаров культурно-бытового назначения и хозяйственного обихода:

Годы	1971	1972	1973
Выпуск продукции (в млрд. руб.)	82	89	95

Методом экстраполяции определить предварительно выпуск продукции легкой промышленности на 1974 г.

18. Подобрать аналитическую зависимость, отражающую выпуск специалистов высших учебных заведений в СССР (на начало учебного года), если эта зависимость представлена таблично:

Годы	1966	1967	1968
Число специалистов (в тыс. чел.)	8	12	13

19. Основные показатели развития связи (количество отправленных писем) представлены таблицей:

Годы	1965	1970	1971
Количество писем (в млрд.)	5,2	8,0	8,3

Определить ориентировочный прирост количества отправленных писем в 1973 г. по отношению к 1971 г., используя метод экстраполяции

20 Рентабельность промышленных предприятий СССР представлена таблицей:

Годы	1960	1965	1970
Прибыль (в млрд. руб.)	14,0	22,5	56,0

Определить рентабельность предприятий в 1968 г., пользуясь схемой Эйткина.

21. Добыча природного газа в Италии за период 1966—1968 г. представлена таблицей:

Годы	1966	1967	1968
Добыча природного газа (в млрд. $м^3$)	8,8	9,3	10,4

Подобрать интерполяционный многочлен, представляющий добычу природного газа как функцию времени.

22. Добыча природного газа в ФРГ за период 1966—1968 г. представлена таблицей:

Годы	1966	1967	1968
Добыча природного газа (в млрд. $м^3$)	2,8	3,7	5,8

Определить ориентировочно прирост добычи природного газа в 1969 г. по отношению к 1968 г., пользуясь методом экстраполяции.

Глава V

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ

§ 5.1. Характеристический многочлен и методы определения его коэффициентов

Пусть $A = [a_{ij}]$ — квадратная матрица n-го порядка с действительными элементами и λ — некоторое неизвестное. Тогда матрица $A - \lambda E$, где E — единичная матрица n-го порядка, называется *характеристической матрицей* матрицы A. Так как в матрице λE по главной диагонали стоят λ, а все остальные элементы равны нулю, то характеристическая матрица имеет вид

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Определитель этой матрицы называется *характеристическим определителем* и равен

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

В развернутом виде $\det(A - \lambda E)$ — многочлен n-й степени от λ, так как при вычислении этого определителя произведение элементов главной диагонали дает многочлен со старшим членом $(-1)^n \lambda^n$, т. е.

$$\det(A-\lambda E)=(-1)^n[\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}-\ldots+(-1)^n p_n]. \qquad (3)$$

Многочлен (3) называется *характеристическим многочленом* матрицы A, а его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, которые могут быть как действительными, так и комплексными,— *характеристическими числами*, или *собственными значениями*, матрицы A. Числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называются коэффициентами характеристического многочлена (3).

Ненулевой вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *собственным вектором* матрицы A, если эта матрица переводит вектор X в вектор

$$AX = \lambda X, \qquad (4)$$

т. е. произведение матрицы A на вектор X и произведение характеристического числа λ на вектор X есть один и тот же вектор. Каждому собственному значению λ_i матрицы соответствует свой собственный вектор X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Для определения координат собственного вектора составим уравнение

$$(A - \lambda E)X = 0, \qquad (5)$$

которое называется *характеристическим*. Переписав его в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5')$$

и выполнив умножение, получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}\,x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)\,x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (5'')$$

Определитель системы (5″) равен нулю, так как из этого условия были определены собственные значения матрицы A; следовательно, система (5″) имеет бесчисленное множество решений, ее можно решить с точностью до постоянного множителя (как систему однородных уравнений).

Решив эту систему, мы найдем все координаты собственного вектора X. Подставляя в систему (5″) поочередно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, получаем n собственных векторов.

При определении собственных значений и собственных векторов матриц решается одна из двух задач: 1) *определение всех собственных значений и принадлежащих им собственных векторов матриц* или 2) *определение одного или нескольких собственных значений и принадлежащих им собственных векторов.*

Первая задача состоит в развертывании характеристического определителя в многочлен n-й степени (т. е. в определении коэффициентов $p_1, p_2, \ldots, p_n$) с последующим вычислением собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и, наконец, в определении координат собственного вектора $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Вторая задача заключается в определении собственных значений λ (одного или нескольких) итерационными методами без предварительного развертывания характеристического определителя.

Методы первой задачи являются т о ч н ы м и, т. е. если их применить для матриц, элементы которых заданы точно (рациональными числами), и точно проводить вычисления (по правилам действий с обыкновенными дробями), то в результате будет получено точное значение коэффициентов характеристического многочлена, и координаты собственных векторов окажутся выраженными точными формулами через собственные значения.

Обычно собственные векторы матрицы удается определить, используя промежуточные результаты вычислений, проведенных для определения коэффициентов характеристического многочлена. Конечно, для определения собственного вектора, принадлежащего тому или другому значению, это собственное значение должно быть уже вычислено.

Методы решения второй задачи — итерационные, здесь собственные значения получаются как пределы некоторых числовых последовательностей, так же как и координаты принадлежащих им собственных векторов. Так как эти методы не требуют вычисления коэффициентов характеристического многочлена, то они менее трудоемки. Ниже рассматриваются некоторые методы развертывания характеристического определителя и итерационные методы нахождения собственных значений матрицы.

§ 5.2. Метод непосредственного развертывания

Рассмотрим на примере матрицы третьего порядка, как находятся коэффициенты характеристического многочлена непосредственным развертыванием характеристического определителя. Пусть

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель по правилу треугольников:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-$$

$$-a_{13}a_{31}(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}(a_{33}-\lambda)-a_{23}a_{32}(a_{11}-\lambda)=$$

$$=-\lambda^3+\lambda^2(a_{11}+a_{22}+a_{33})-\lambda[(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+$$
$$+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})]+(a_{11}a_{22}a_{33}+$$
$$+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11})=$$

$$=(-1)^3\cdot\left[\lambda^3-\lambda^2(a_{11}+a_{22}+a_{33})+\lambda\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right)-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right],$$

или

$$\det(A-\lambda E)=(-1)^3(\lambda^3-p_1\lambda^2+p_2\lambda-p_3)=0.$$

Здесь коэффициент p_1 — сумма диагональных элементов матрицы A; он называется *следом* матрицы и обозначается $\mathrm{Sp}\,A$:

$$p_1=\mathrm{Sp}\,A=a_{11}+a_{22}+a_{33};$$

коэффициент p_2 — сумма всех диагональных миноров второго порядка матрицы A:

$$p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(*диагональными минорами* второго, третьего, ..., n-го порядка называются миноры, элементы главных диагоналей которых являются элементами главной диагонали определителя $\det A$); коэффициент

$$p_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вообще, если требуется развернуть определитель $\det (A - \lambda E)$ в многочлен n-й степени:

$$D(\lambda) = (-1)^n \cdot [\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n]$$

то коэффициенты p_1, p_2, ..., p_n вычисляются по следующим формулам:

$p_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{Sp} A$ — *сумма всех диагональных элементов матрицы* A;

$p_2 = \sum\limits_{\alpha<\beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix}$ — *сумма всех диагональных миноров второго порядка матрицы* A;

$p_3 = \sum\limits_{\alpha<\beta<\gamma} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}$ — *сумма всех диагональных миноров третьего порядка матрицы* A;

. . . .

$p_n = \det A$ — *определитель матрицы* A.

Число диагональных миноров k-го порядка матрицы A равно

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Пример. Методом непосредственного развертывания найти характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. 1) Находим

$$p_1 = \operatorname{Sp} A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = -4 + 0 + 2 - 1 = -3.$$

2) Имеем $p_2 = \sum\limits_{\alpha<\beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix}$. Число диагональных миноров второго по-

рядка у матрицы четвертого порядка равно $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$. Выписывая все эти миноры и складывая их, получаем

$$p_2 = \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{\alpha=1;\ \beta=2} + \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\alpha=1;\ \beta=3} + \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{\alpha=1;\ \beta=4} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\alpha=2;\ \beta=3} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{\alpha=2;\ \beta=4} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}_{\alpha=3;\ \beta=4} = -7.$$

3) Имеем $p_3 = \sum\limits_{\alpha<\beta<\gamma} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}$. Число диагональных миноров третьего порядка у матрицы четвертого порядка равно $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$. Следовательно,

$$p_3 = \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\alpha=1;\ \beta=2;\ \gamma=3} + \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{\alpha=1;\ \beta=2;\ \gamma=4} + \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}_{\alpha=1,\ \beta=3;\ \gamma=4} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}_{\alpha=2;\ \beta=3;\ \gamma=4} = 24.$$

4) Находим, наконец,

$$p_4 = \det A = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -15.$$

5) Таким образом, окончательно получаем

$$D(\lambda) = \lambda^4 - p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 - p_3\lambda + p_4 = \lambda^4 + 3\lambda^3 - 7\lambda^2 - 24\lambda - 15.$$

Метод непосредственного развертывния очень трудоемок и применяется при нахождении характеристических многочленов для матриц невысоких порядков.

§ 5.3. Метод Крылова для развертывания характеристического определителя

Метод Крылова основан на свойстве квадратной матрицы обращать в нуль свой характеристический многочлен.

Согласно тождеству Гамильтона — Кели, всякая *квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена* и, следовательно, *обращает его в нуль*.

Пусть

$$D(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\ldots+p_n \qquad (1)$$

— характеристический многочлен матрицы A. Заменяя в равенстве (1) величину λ на $A=[a_{ij}]$ (где $i=1, 2,\ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$), получим

$$A^n+p_1A^{n-1}+p_2A^{n-2}+\ldots+p_nE=0. \qquad (2)$$

Возьмем произвольный ненулевой вектор

$$Y^{(0)}=\begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

и умножим обе части равенства (2) справа на $Y^{(0)}$:

$$A^nY^{(0)}+p_1A^{n-1}Y^{(0)}+p_2A^{n-2}Y^{(0)}+\ldots+p_nY^{(0)}=0. \qquad (4)$$

Положим теперь

$$AY^{(k-1)}=Y^{(k)} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (5)$$

т. е.

$$Y^{(1)}=AY^{(0)},$$
$$Y^{(2)}=AY^{(1)}=A^2Y^{(0)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$Y^{(n)}=AY^{(n-1)}=A^nY^{(0)}.$$

Равенство (4) принимает тогда следующий вид:

$$Y^{(n)}+p_1Y^{(n-1)}+p_2Y^{(n-2)}+\ldots+p_nY^{(0)}=0, \qquad (6)$$

или

$$p_1Y^{(n-1)}+p_2Y^{(n-2)}+\ldots+p_nY^{(0)}=-Y^{(n)},$$

или

$$p_1\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} \\ y_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}+p_2\begin{bmatrix} y_1^{(n-2)} \\ y_2^{(n-2)} \\ \vdots \\ y_n^{(n-2)} \end{bmatrix}+\ldots+p_n\begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \vdots \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix},$$

т. е.

$$\begin{cases} p_1y_1^{(n-1)}+p_2y_1^{(n-2)}+\ldots+p_ny_1^{(0)}=-y_1^{(n)}, \\ p_1y_2^{(n-1)}+p_2y_2^{(n-2)}+\ldots+p_ny_2^{(0)}=-y_2^{(n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1y_n^{(n-1)}+p_2y_n^{(n-2)}+\ldots+p_ny_n^{(0)}=-y_n^{(n)}, \end{cases} \qquad (7)$$

или, наконец, в матричном виде

$$\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \dots & y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_2^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \dots & y_n^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \vdots \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Векторы $Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}, \dots, Y_i^{(n)}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} Y_i^{(1)} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j^{(0)} = AY^{(0)}, \\ Y_i^{(2)} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j^{(1)} = AY^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_i^{(n)} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j^{(n-1)} = AY^{(n-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \qquad (9)$$

причем координаты начального вектора (3) берутся произвольно. Если линейная система (7) имеет единственное решение, то ее корни p_1, p_2, ..., p_n являются коэффициентами характеристического многочлена (1). Это решение может быть найдено по методу Гаусса.

Пример 1. Методом Крылова развернуть характеристический определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. 1) Выбираем начальный вектор

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2) Пользуясь формулами (9), определяем координаты векторов $Y^{(k)} = AY^{(k-1)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$:

$$Y^{(1)} = AY^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Таблица 5.1

p_1	p_2	p_3	p_4	Свободные члены	Σ
$\boxed{-39}$	12	-4	1	-120	-150
20	-5	2	0	47	64
11	-2	1	0	23	33
13	-4	1	0	43	53
1	$-4/13$	$4/39$	$-1/39$	$40/13$	$50/13$
	$\boxed{15/13}$	$-2/39$	$20/39$	$-189/13$	$-168/13$
	$18/13$	$-5/39$	$11/39$	$-141/13$	$-121/13$
	0	$-1/3$	$-1/3$	3	3
	1	$-2/45$	$4/9$	$-53/5$	$-56/5$
		$\boxed{-1/15}$	$-1/3$	$33/5$	$31/5$
		$-1/3$	$1/3$	3	3
		1	5	-99	-93
			$\boxed{2}$	-30	-28
			1	-15	-14
			1	$p_4=-15$	$\bar{p}_4=-14$
		1		$p_3=-24$	$\bar{p}_3=-23$
	1			$p_2=-7$	$\bar{p}_2=-6$
1				$p_1=3$	$\bar{p}_1=4$

$$Y^{(2)}=AY^{(1)}=\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$Y^{(3)}=AY^{(2)}=\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -39 \\ 20 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix},$$

$$Y^{(4)}=AY^{(3)}=\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -39 \\ 20 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 120 \\ -47 \\ -23 \\ -43 \end{bmatrix}.$$

3) Составляем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -39 & 12 & -4 & 1 \\ 20 & -5 & 2 & 0 \\ 11 & -2 & 1 & 0 \\ 13 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 120 \\ -47 \\ -23 \\ -43 \end{bmatrix}.$$

Записываем систему вида (7):

$$\begin{cases} -39p_1+12p_2-4p_3+p_4=-120, \\ 20p_1-5p_2+2p_3 = 47, \\ 11p_1-2p_2+p_3 = 23, \\ 13p_1-4p_2+p_3 = 43. \end{cases}$$

Решаем эту систему по схеме Гаусса (см. табл. 5.1 на стр 215).

Таким образом,

$$D(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\lambda^4+p_1\lambda^3+p_2\lambda^2+p_3\lambda+p_4=\lambda^4+3\lambda^3-7\lambda^2-24\lambda-15.$$

Если же полученная линейная система (7) не имеет единственного решения, то следует изменить начальный вектор.

Пример 2. Методом Крылова развернуть характеристический определитель матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1) Возьмем в качестве начального вектора $Y^{(0)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; тогда получим

$$Y^{(1)}=AY^{(0)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad Y^{(2)}=AY^{(1)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$Y^{(3)}=AY^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad Y^{(4)}=AY^{(3)}=\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2) Составляем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} p_1+p_3+p_4=1, \\ 4p_1+4p_2+2p_3=-6, \\ 2p_1-p_2+p_3=3, \\ 2p_1+2p_2+p_3=-3. \end{cases}$$

Решаем эту систему по схеме единственного деления (см табл. 5.2).

Таблица 5 2

p_1	p_2	p_3	p_4	Свободные члены	Σ
$\boxed{1}$	0	1	1	1	4
4	4	2	0	—6	4
2	—1	1	0	3	5
2	2	1	0	—3	2
1	0	1	1	1	4
	$\boxed{4}$	—2	—4	—10	—12
	—1	—1	—2	1	—3
	2	—1	—2	—5	—6
	1	—0,5	—1	—3	—3,5
		$\boxed{-1,5}$	—3	—2	—6,5
		0	0	1	1
		1	2	1,333	4,333
			$\boxed{0}$	1	1

Так как ведущий элемент равен нулю, то продолжать вычисления по этой схеме невозможно.

3) Для получения единственного решения меняем начальный вектор, полагая $Y^{(0)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, находим

$$Y^{(1)}=AY^{(0)}=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad Y^{(2)}=AY^{(1)}=\begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$Y^{(3)} = AY^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad Y^{(4)} = AY^{(3)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

приводит к системе

$$\begin{cases} 4p_1 + 6p_2 + 2p_3 = -10, \\ 4p_1 - 4p_2 - 4p_3 = -8, \\ -4p_1 + 4p_2 - 2p_3 = -10, \\ 3p_1 - p_2 - p_3 + p_4 = -5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2p_1 + 3p_2 + p_3 = -5, \\ p_1 - p_2 - p_3 = -2, \\ -2p_1 + 2p_2 - p_3 = -5, \\ 3p_1 - p_2 - p_3 + p_4 = -5. \end{cases}$$

которую решаем по схеме единственного деления (см табл. 5.3).

Таблица 5.3

p_1	p_2	p_3	p_4	Свободные члены	Σ
$\boxed{2}$	3	1	0	−5	1
1	−1	−1	0	−2	−3
−2	2	−1	0	−5	−6
3	−1	−1	1	−5	−3
1	1,5	0,5	0	−2,5	0,5
	$\boxed{-2,5}$	−1,5	0	0,5	−3,5
	5	0	0	−10	−5
	−5,5	−2,5	1	2,5	−4,5
	1	0,6	0	−0,2	1,4
		$\boxed{-3}$	0	−9	−12
		0,8	1	1,4	3,2
		1	0	3	4
			$\boxed{1}$	−1	0
			1	$p_4 = -1$	$\bar{p}_4 = 0$
		1		$p_3 = 3$	$\bar{p}_3 = 4$
	1			$p_2 = -2$	$\bar{p}_2 = -1$
1				$p_1 = -1$	$\bar{p}_1 = 0$

Следовательно,

$$D(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1.$$

§ 5.4. Вычисление собственных векторов по методу Крылова

Если известны коэффициенты p_1, $p_2, \ldots, p_n$ и корни λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n характеристического многочлена, то метод Крылова дает возможность найти соответствующие собственные векторы по следующей формуле:

$$X^{(i)} = Y^{(n-1)} + q_{1i} Y^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1,\, i} Y^{(0)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Здесь $Y^{(n-1)}$, $Y^{(n-2)}$, $\ldots$, $Y^{(0)}$ — векторы, использованные при нахождении коэффициентов p_1, p_2, $\ldots$, p_n методом Крылова, а коэффициенты q_{ji} ($j = 1, 2, \ldots, n-1$; $i = 1, 2, \ldots, n$) определяются по схеме Горнера:

$$= 1;\ q_{ji} = \lambda_i q_{j-1,\ i} + p_j. \qquad (2)$$

Пример. Методом Крылова вычислить собственные векторы матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы A известен:

$$\det (A - \lambda E) = \lambda^4 - \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

(см. пример 2 § 5.3), а собственные значения таковы: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 0{,}618$; $\lambda_4 = -1{,}618$. Для нахождения собственных векторов воспользуемся формулой (1):

$$X^{(i)} = Y^{(3)} + q_{1i} Y^{(2)} + q_{2i} Y^{(1)} + q_{3i} Y^{(0)}.$$

Здесь $q_{0i} - 1$, а коэффициенты q_{ji} ($j = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3, 4$) вычисляем по схеме Горнера (см. табл. 5.4).

Таблица 5.4

λ_i	$p_0 = 1$	$p_1 = -1$	$p_2 = -2$	$p_3 = 3$
$\lambda_1 = 1$	$q_{01} = 1$	$q_{11} = 0$	$q_{21} = -2$	$q_{31} = 1$
$\lambda_2 = 1$	$q_{02} = 1$	$q_{12} = 0$	$q_{22} = -2$	$q_{32} = 1$
$\lambda_3 = 0{,}618$	$q_{03} = 1$	$q_{13} = -0{,}382$	$q_{23} = -4{,}35$	$q_{33} = 0{,}312$
$\lambda_4 = -1{,}618$	$q_{04} = 1$	$q_{14} = -2{,}618$	$q_{24} = 1{,}236$	$q_{34} = 1{,}09$

Воспользуемся выражениями для векторов $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ и $Y^{(3)}$, найденными в примере 2 § 5.3, и получим

$$X^{(1)} = X^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$X^{(3)}=\begin{bmatrix}4\\4\\-4\\3\end{bmatrix}-0,382\cdot\begin{bmatrix}6\\-4\\4\\-1\end{bmatrix}-4,35\cdot\begin{bmatrix}2\\-4\\-2\\-1\end{bmatrix}+$$

$$+0,312\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6,99\\22,93\\3,17\\7,86\end{bmatrix};$$

$$X^{(4)}=\begin{bmatrix}4\\4\\-4\\3\end{bmatrix}-2,618\cdot\begin{bmatrix}6\\-4\\4\\-1\end{bmatrix}+1,236\cdot\begin{bmatrix}2\\-4\\-2\\-1\end{bmatrix}+1,09\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9,34\\14,86\\-22,21\\5,47\end{bmatrix}.$$

Метод Данилевского

Две матрицы A и B называются *подобными*, если одна получается из другой путем преобразования с помощью некоторой неособенной матрицы, т. е. выполняется равенство

$$B = S^{-1}AS.$$

Если матрица B подобна матрице A, то пишут $B \backsim A$.

В *методе Данилевского* при построении вычислительной схемы используется основное свойство подобных матриц: *подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены.*

Если привести данную матрицу

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ . & . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \qquad (1)$$

с помощью преобразований подобия к так называемому *виду Фробениуса*:

$$F=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1,n-1} & f_{1n}\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ . & . & . & \dots & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad (2)$$

и затем определитель

$$\det(F-\lambda E)=\begin{vmatrix} f_{11}-\lambda & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1,n-1} & f_{1n} \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \qquad (2)$$

разложить по элементам первой строки, то получим

$$D(\lambda)=\det(F-\lambda E)=(f_{11}-\lambda)(-\lambda)^{n-1}-f_{12}(-\lambda)^{n-2}+ \\ +f_{13}(-\lambda)^{n-3}-\dots+(-1)^{n-1}f_{1n},$$

или

$$D(\lambda)=\det(F-\lambda E)= \\ =(-1)^n(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-p_3\lambda^{n-3}-\dots-p_n). \qquad (4)$$

Здесь $p_1=f_{11}$, $p_2=f_{12}$, $p_3=f_{13}$, ..., $p_n=f_{1n}$ — коэффициенты характеристического многочлена матрицы F, которые в силу подобия матриц F и A являются и коэффициентами характеристического многочлена данной матрицы A.

Согласно методу Данилевского, переход от матрицы A к подобной ей матрице Фробениуса F осуществляется с помощью $n-1$ преобразований подобия, последовательно преобразующих строки матрицы A, начиная с последней, в соответствующие строки матрицы P.

Схема преобразования матрицы A в подобную ей матрицу Фробениуса F. 1) Пусть нам нужно строку $a_{n1}\,a_{n2}\dots a_{n,n-1}\;a_{nn}$ перевести в строку $0\;0\dots1\;0$. Предполагая, что $a_{n,n-1}\neq0$, разделим все элементы $(n-1)$-го столбца матрицы A на $a_{n,n-1}$. Тогда ее n-я строка примет вид

$$a_{n1}\quad a_{n2}\dots\frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-1}}\quad a_{nn},\ \text{или}\ a_{n1}\quad a_{n2}\dots1\;a_{nn}.$$

2) Вычтем $(n-1)$-й столбец преобразованной матрицы, умноженный соответственно на числа a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}, из всех остальных столбцов. Для n-й строки получим

$$a_{n1}-a_{n1}\quad a_{n2}-a_{n2}\dots1\;a_{nn}-a_{nn},\ \text{или}\ 0\;0\dots1\;0.$$

3) В качестве неособенной матрицы берем матрицу M_{n-1}, полученную из единичной после таких же преобразований:

$$M_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$m_{n-1,i}=-\frac{a_{ni}}{a_{n,n-1}},\quad m_{n-1,n-1}=\frac{1}{a_{n,n-1}}. \qquad (5)$$

Произведенные операции равносильны умножению справа матрицы M_{n-1} на матрицу A:

$$B = AM_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы B вычисляются по формулам

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{i,n-1}\, m_{n-1,j}; \quad b_{i,n-1} = a_{i,n-1}\, m_{n-1,n-1}. \tag{6}$$

Однако построенная матрица $B = AM_{n-1}$ не будет подобна матрице A.

4) Чтобы получить преобразование подобия, нужно обратную матрицу M_{n-1}^{-1} слева умножить на матрицу B:

$$M_{n-1}^{-1}\, AM_{n-1} = M_{n-1}^{-1}\, B.$$

Обратная матрица M_{n-1}^{-1} имеет вид

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Полагаем $M_{n-1}^{-1}\, AM_{n-1} = C$; следовательно, $C = M_{n-1}^{-1}\, B$. Умножение слева матрицы M_{n-1}^{-1} на матрицу B не изменяет преобразованной строки последней, и матрица C имеет вид

$$C = M_{n-1}^{-1}\, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$
\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \dots c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Действительно, перемножая матрицы M_{n-1}^{-1} и B, мы меняем только $(n-1)$-ю строку матрицы B, так как $c_{ij} = b_{ij}$ для всех остальных строк. Элементы этой строки находятся по формулам

$$
c_{n-1,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{7}
$$

Полученная матрица C подобна матрице A и имеет одну приведенную строку.

5) Далее, если $c_{n-1,\ n-2} \neq 0$, то над матрицей C повторяем аналогичные операции, взяв за основную $(n-2)$-ю строку. Тогда, используя промежуточную матрицу $D = CM_{n-2}$, в результате получим матрицу $E = M_{n-2}^{-1} D = M_{n-2}^{-1} CM_{n-2}$ с двумя приведенными строками. Над матрицей E проделываем те же операции и т. д. до получения матрицы Фробениуса.

Все эти преобразования оформляются в виде вычислительной схемы, процесс составления которой рассмотрим на конкретном примере.

Пример 1. Методом Данилевского развернуть характеристический определитель матрицы

$$
A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Решение. I этап. Матрицу A приводим к виду Фробениуса. Для вычислений составляем таблицу (см. табл. 5.5 на стр. 224).

1) В строках 1—4 вычислительной таблицы помещаем элементы a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ данной матрицы A и контрольные суммы $a_{i5} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — столбец Σ. Отмечаем элемент $a_{43} = -1$, принадлежащий третьему столбцу (отмеченный столбец).

2) В строке I записываем элементы третьей строки матрицы $M_{n-1} = M_3$, вычисляемые по формулам (5):

$$
m_{31} = -\frac{a_{41}}{a_{43}} = -\frac{1}{-1} = 1; \quad m_{32} = -\frac{a_{42}}{a_{43}} = -\frac{1}{-1} = 1;
$$

$$
m_{33} = \frac{1}{a_{43}} = \frac{1}{-1} = -1; \quad m_{34} = -\frac{a_{44}}{a_{43}} = -\frac{-1}{-1} = -1; \quad m_{35} = -\frac{a_{45}}{a_{43}} = \frac{0}{-1} = 0.
$$

Число 0 должно совпадать с суммой элементов строки I после замены полученного значения элемента m_{33} на -1, но в нашем примере $m_{33} = -1$ (Обычно *для удобства число* -1 записывается рядом с элементом m_{33} и отделяется от последнего чертой.)

Таблица 5.5

Строки	M^{-1}	Столбцы 1	2	3	4	Σ	Σ'
1		—4	—3	1	1	—5	
2		2	0	4	—1	5	
3		1	1	2	—2	2	
4		1	1	$\boxed{-1}$	—1	0	
I	M_3 / M_3^{-1}	1	1	—1	—1	0	
5	1	—3	—2	—1	0	—6	—5
6	1	6	4	—4	—5	1	5
7	—1	3	3	—2	—4	0	2
8	—1	0	0	1	0	1	0
7′		0	$\boxed{-1}$	—4	—1	—6	
II	M_2 / M_2^{-1}	0	—1	—4	—1	—6	
9	0	—3	2	7	2	8	6
10	—1	6	—4	—20	—9	—27	—23
11	—4	0	1	0	0	1	0
12	—1	0	0	1	0	1	0
10′		$\boxed{-6}$	0	19	9	22	
III	M_1 / M_1^{-1}	0,167|—1	0	3,167	1,500	3,667	
13	—6	0,500	2,000	—2,500	—2,500	—2,500	—3
14	0	1	0	0	0	1	0
15	19	0	1	0	0	1	0
16	9	0	0	1	0	1	0
13′		—3	7	24	15	43	

3) В строках 5—8 в графе M^{-1} выписываем третью строку матрицы M_3^{-1}, которая должна совпадать с четвертой строкой исходной матрицы A.

4) В строках 5—8 в соответствующих столбцах выписываем элементы матрицы $B = AM_3$, вычисляемые по формулам (6) для неотмеченных столбцов.

Первый столбец:

$$b_{11} = a_{11} + a_{13}\, m_{31} = -4 + 1 \cdot 1 = -3; \quad b_{21} = a_{21} + a_{23}\, m_{31} = 2 + 4 \cdot 1 = 6;$$

$$b_{31} = a_{31} + a_{33}\, m_{31} = 1 + 2 \cdot 1 = 3; \quad b_{41} = a_{41} + a_{43}\, m_{31} = 1 + (-1) \cdot 1 = 0.$$

Второй столбец:

$$b_{12}=a_{12}+a_{13}m_{32}=-3+1\cdot 1=-2;\quad b_{22}=a_{22}+a_{23}m_{32}=0+4\cdot 1=4;$$
$$b_{32}=a_{32}+a_{33}m_{32}=1+2\cdot 1=3;\quad b_{42}=a_{42}+a_{43}m_{32}=1+(-1)\cdot 1=0.$$

Четвертый столбец:

$$b_{14}=a_{14}+a_{13}m_{34}=1+1\cdot(-1)=0;\quad b_{24}=a_{24}+a_{23}m_{34}=-1+4\cdot(-1)=-5;$$
$$b_{34}=a_{34}+a_{33}m_{34}=-2+2\cdot(-1)=-4;\quad b_{44}=a_{44}+a_{43}m_{34}=$$
$$=-1+(-1)\cdot(-1)=0.$$

Преобразованные элементы третьего (отмеченного) столбца получаются с помощью умножения исходных элементов на $m_{33}=-1$.

Третий столбец:

$$b_{13}=a_{13}m_{33}=1\cdot(-1)=-1;\quad b_{23}=a_{23}m_{33}=4\cdot(-1)=-4;$$
$$b_{33}=a_{33}m_{33}=2\cdot(-1)=-2;\quad b_{43}=a_{43}m_{33}=(-1)\cdot(-1)=1.$$

Последняя строка матрицы B должна иметь вид 0 0 1 0.

Для контроля пополняем матрицу B преобразованными по аналогичным двучленным формулам с $m_{35}=0$ соответствующими элементами столбца Σ':

$$b_{16}=a_{15}+a_{13}m_{35}=-5+1\cdot 0=-5;\quad b_{26}=a_{25}+a_{23}m_{35}=5+4\cdot 0=5;$$
$$b_{36}=a_{36}+a_{33}m_{35}=2+2\cdot 0=2;\quad b_{46}=a_{16}+a_{43}m_{35}=0+(-1)\cdot 0=0.$$

Полученные результаты записываем в столбце Σ' в соответствующих строках. Прибавив к элементам столбца Σ' соответствующие элементы третьего (отмеченного) столбца, получим контрольные суммы для строк 5—8 ($i=1, 2, 3, 4$).

Столбец Σ:

$$b_{15}=b_{16}+a_{13}=-5-1=-6;\quad b_{25}=b_{26}+a_{23}=5-4=1;$$
$$b_{35}=b_{36}+a_{33}=2-2=0;\quad b_{45}=b_{46}+a_{43}=0+1=1.$$

Кроме того, элементы столбца Σ для контроля вычисляются по формуле $b_{i5}=\sum_{j=1}^{4} b_{ij}$ ($i=1, 2, 3, 4$):

$$b_{15}=b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{14}=-3-2-1+0=-6;\quad b_{25}=b_{21}+b_{22}+b_{23}+b_{24}=$$
$$=6+4-4-5=1;$$
$$b_{35}=b_{31}+b_{32}+b_{33}+b_{34}=3+3-2-4=0;\quad b_{45}=b_{41}+b_{42}+b_{43}+b_{44}=$$
$$=0+0+1+0=1.$$

Матрица B имеет следующий вид:

$$B=\begin{bmatrix}-3 & -2 & -1 & 0\\ 6 & 4 & -4 & -5\\ 3 & 3 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

5) Преобразование M_3^{-1}, произведенное над матрицей B и дающее матрицу $C=M_3^{-1}B$, изменяет лишь третью строку матрицы B, т. е. седьмую строку таблицы. Элементы этой преобразованной строки 7′ представляют собой суммы парных произведений элементов столбца M_3^{-1}, находящихся в строках 5—8, на соответствующие элементы каждого из столбцов матрицы B [см. формулы (7)]:

$$c_{31}=1\cdot(-3)+1\cdot 6+(-1)\cdot 3+(-1)\cdot 0=0;$$
$$c_{32}=1\cdot(-2)+1\cdot 4+(-1)\cdot 3+(-1)\cdot 0=-1;$$
$$c_{33}=1\cdot(-1)+1\cdot(-4)+(-1)\cdot(-2)+(-1)\cdot 1=-4;$$
$$c_{34}=1\cdot 0+1\cdot(-5)+(-1)\cdot(-4)+(-1)\cdot 0=-1.$$

Те же преобразования производим над столбцом Σ:

$$c_{35}=1\cdot(-6)+1\cdot 1+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 1=-6.$$

В результате получаем матрицу C, состоящую из строк 5, 6, 7', 8 с контрольными суммами в столбце Σ:

$$C=\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & \boxed{-1} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица C подобна матрице A и имеет одну приведенную строку. Этим заканчивается построение первого подобного преобразования $C = M_3^{-1}AM_3$.

II этап. Принимая матрицу C за исходную, выделяем элемент $c_{32} = -1$ (второй столбец) и продолжаем процесс аналогичным образом.

1) Находим элементы матрицы $M_{n-2} = M_2$ по формулам (5):

$$m_{21} = -\frac{c_{31}}{c_{32}} = -\frac{0}{-1} = 0; \quad m_{22} = \frac{1}{c_{32}} = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$m_{23} = -\frac{c_{33}}{c_{32}} = -\frac{-4}{-1} = -4; \quad m_{24} = -\frac{c_{34}}{c_{32}} = -\frac{-1}{-1} = -1;$$

$$m_{25} = -\frac{c_{35}}{c_{32}} = -\frac{-6}{-1} = -6.$$

Просуммируем: $0-1-4-1 = -6$ ($m_{22} = -1$; если бы $m_{22} \neq -1$, то нужно было бы заменить m_{22} на -1).

2) В строках 9—12 в графе M^{-1} выписываем вторую строку матрицы M_2^{-1}, которая совпадает с третьей строкой матрицы C (см. табл. 5.5). Находим элементы матрицы $D = CM_2$.

Первый столбец:

$$d_{11} = -3 + (-2)\cdot 0 = -3; \quad d_{21} = 6 + 4\cdot 0 = 6; \quad d_{31} = 0 + 0 = 0.$$

Второй столбец (отмеченный) получается умножением соответствующих элементов матрицы C на $m_{22} = -1$:

$$d_{12} = c_{12}m_{22} = (-2)\cdot(-1) = 2; \quad d_{22} = c_{22}m_{22} = 4\cdot(-1) = -4;$$
$$d_{32} = c_{32}m_{22} = (-1)\cdot(-1) = 1.$$

Третий столбец:

$$d_{13} = c_{13} + c_{12}m_{23} = -1 + (-2)\cdot(-4) = 7; \quad d_{23} = c_{23} + c_{22}m_{23} =$$
$$= -4 + 4\cdot(-4) = -20; \quad d_{33} = c_{33} + c_{32}m_{23} = -4 + (-1)(-4) = 0.$$

Четвертый столбец:

$$d_{14} = c_{14} + c_{12}m_{24} = 0\cdot 1 + (-2)\cdot(-1) = 2; \quad d_{24} = c_{24} + c_{22}m_{24} =$$
$$= -5 + 4\cdot(-1) = -9; \quad d_{34} + c_{32}m_{24} = -1 + (-1)\cdot(-1) = 0.$$

Столбец Σ':

$$d_{16} = c_{15} + c_{12}m_{25} = -6 + (-2)\cdot(-6) = 6; \quad d_{26} = c_{25} + c_{22}m_{25} =$$
$$= 1 + 4\cdot(-6) = -23; \quad d_{36} = c_{35} + c_{32}m_{25} = -6 + (-1)(-6) = 0.$$

Элементы столбца Σ получаются сложением элементов столбца Σ' с соответствующими элементами отмеченного столбца:

$$d_{15} = d_{16} + d_{12} = 6 + 2 = 8; \quad d_{25} = d_{26} + d_{22} = -23-4 = -27;$$
$$d_{35} = d_{36} + d_{32} = 0 + 1 = 1.$$

Матрица D имеет вид

$$D=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & -4 & -20 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Преобразование M_2^{-1}, произведенное над матрицей D и дающее матрицу $E = M_2^{-1}D$, изменяет лишь вторую строку матрицы D, т. е. десятую строку таблицы. Элементы этой преобразованной строки 10′ представляют собой суммы парных произведений элементов столбца M_2^{-1}, находящихся в строках 9—12:

$$e_{21} = 0\cdot(-3)+(-1)\cdot 6+(-4)\cdot 0+(-1)\cdot 0 = -6;\ e_{22} = 0\cdot 2+(-1)\cdot(-4)+(-4)\cdot 1+ +(-1)\cdot 0 = 0;\quad e_{23} = 0\cdot 7+(-1)\cdot(-20)+(-4)\cdot 0+(-1)\cdot 1 = 19;\quad e_{24} = 0\cdot 2+ +(-1)\cdot(-9)+(-4)\cdot 0+(-1)\cdot 0 = 9;\quad e_{25} = 0\cdot 8+(-1)\cdot(-27)+(-4)\cdot 1+ +(-1)\cdot 1 = 22;\quad \Sigma e_{2j} = -6+0+19+9 = 22.$$

На этом заканчивается построение второго подобного преобразования $E = M_2^{-1}CM_2$. Матрица $E \backsim C$ содержит две приведенные строки:

$$E = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 & 2 \\ \boxed{-6} & 0 & 19 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

III э т а п. Принимаем матрицу E за исходную. Выделяем в ней элемент $e_{21} = -6$ (первый столбец) и преобразуем матрицу E в подобную ей матрицу Фробениуса F. Продолжая процесс аналогичным образом, по формулам (5) найдем элементы матрицы $M_{n-3} = M_1$:

$$m_{11} = \frac{1}{e_{21}} = \frac{1}{-6} = -0,167;\quad m_{12} = -\frac{e_{22}}{e_{21}} = -\frac{0}{-6} = 0;$$

$$m_{13} = -\frac{e_{23}}{e_{21}} = -\frac{19}{-6} = 3,167;$$

$$m_{14} = -\frac{e_{24}}{e_{21}} = -\frac{9}{-6} = 1,500;\quad m_{15} = -\frac{e_{25}}{e_{21}} = -\frac{22}{-6} = 3,667.$$

Чтобы получилась сумма $\Sigma = 3,667$, заменяем $m_{11} = -0,167$ на -1:

$$\Sigma = -1 + 0 + 3,167 + 1,500 = 3,667.$$

Матрицу Фробениуса F будем записывать в строках 13—16. Сначала строим $G = EM_1$ и затем $F = M_1^{-1}G$. В столбец M_1^{-1} выписываем строку 10′ матрицы E (см. табл. 5.5).

Первый столбец (отмеченный):

$$g_{11} = e_{11}m_{11} = (-3)\cdot(-0,167) = 0,500;$$
$$g_{21} = e_{21}m_{11} = (-6)\cdot(-0,167) = 1,000.$$

Второй столбец:

$$g_{12} = e_{12} + e_{11}m_{12} = 2 + (-3)\cdot 0 = 2,000;$$
$$g_{22} = e_{22} + e_{21}m_{12} = 0 + (-6)\cdot 0 = 0.$$

Третий столбец:

$$g_{13} = e_{13} + e_{11}m_{13} = 7 + (-3)\cdot 3,167 = -2,500;$$
$$g_{23} = e_{23} + e_{21}m_{13} = 19 + (-6)\cdot 3,167 = 0.$$

Четвертый столбец:

$$g_{14} = e_{14} + e_{11}m_{14} = 2 + (-3)\cdot 1,500 = -2,500;$$
$$g_{24} = e_{24} + e_{21}m_{14} = 9 + (-6)\cdot 1,500 = 0.$$

Столбец Σ':

$$g_{16} = e_{15} + e_{11}m_{15} = 8 + (-3)\cdot 3,667 = -3;$$
$$g_{26} = e_{25} + e_{21}m_{15} = 22 + (-6)\cdot 3,667 = 0.$$

Столбец Σ:

$$g_{15}=g_{16}+g_{11}= -3+0{,}500= -2{,}500;$$
$$g_{15}=g_{11}+g_{12}+g_{13}+g_{14}=0{,}500+2{,}000-2{,}500-2{,}500= -2{,}500;$$
$$g_{25}=g_{26}+g_{21}=0+1=1;$$
$$g_{25}=g_{21}+g_{22}+g_{23}+g_{24}=1+0+0+0=1.$$

Элементы преобразованной строки 13′ представляют собой суммы парных произведений столбца M_I^{-1}, находящихся в строках 13—16:

$$f_{11}=(-6)\cdot 0{,}500+0\cdot 1+19\cdot 0+9\cdot 0=-3;\quad f_{12}=(-6)\cdot 2{,}000+$$
$$+0\cdot 0+19\cdot 1+9\cdot 0=7;\quad f_{13}=(-6)\cdot(-2{,}500)+0\cdot 0+19\cdot 0+9\cdot 1=24;$$
$$f_{14}=(-6)\cdot(-2{,}500)+0\cdot 0+19\cdot 0+9\cdot 0=15;\quad \Sigma=(-6)\cdot(-2{,}500)+$$
$$+0\cdot 1+19\cdot 1+9\cdot 1=43;\quad \Sigma=-3+7+24+15=43.$$

Таким образом, искомая матрица Фробениуса F, подобная A, имеет вид

$$F=\begin{bmatrix} -3 & 7 & 24 & 15\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Найдем характеристический определитель матрицы F:

$$D(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\det(F-\lambda E)=\begin{bmatrix} -3-\lambda & 7 & 24 & 15\\ 1 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}.$$

Отсюда разложив определитель $D(\lambda)$ по элементам первой строки, получим

$$D(\lambda)=\begin{bmatrix} -3-\lambda & 7 & 24 & 15\\ 1 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}=$$
$$=(-3-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}-7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}+24\cdot\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}-$$
$$-15\cdot\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-3-\lambda)(-\lambda^3)-7\lambda^2+24\cdot(-\lambda)-15=$$
$$=\lambda^4+3\lambda^3-7\lambda^2-24\lambda-15.$$

Исключительные случаи в методе Данилевского. Этот метод применим без всяких осложнений, если все выделяемые элементы отличны от нуля (как в только что рассмотренном примере). Если же при преобразовании матрицы $A=[a_{ij}]$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, n)$ в матрицу Фробениуса F мы пришли к матрице вида

$$D=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1l} & \ldots & d_{1,k-1} & d_{1k} & \ldots & d_{1,n-1} & d_{1n}\\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2l} & \ldots & d_{2,k-1} & d_{2k} & \ldots & d_{2,n-1} & d_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ d_{l1} & d_{l2} & \ldots & d_{ll} & \ldots & d_{l,k-1} & d_{lk} & \ldots & d_{l,n-1} & d_{ln}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ d_{k1} & d_{k2} & \ldots & d_{kl} & \ldots & d_{k,k-1} & d_{kk} & \ldots & d_{k,n-1} & d_{kn}\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\end{bmatrix},$$

причем оказалось, что $d_{k,\,k-1}=0$, то продолжать преобразования по методу Данилевского нельзя. Здесь возможны два случая.

Первый случай. Пусть какой-то элемент матрицы D, стоящий левее нулевого элемента $d_{k,\,k-1}$, отличен от нуля; например, $d_{kl}\neq 0$, где $l<k-1$. Тогда этот элемент выдвигаем на место нулевого элемента $d_{k,\,k-1}$, т. е. переставляем $(k-1)$-й и l-й столбцы матрицы D и одновременно переставляем ее $(k-1)$-ю и l-ю строки. Новая матрица будет подобна данной и можно продолжать вычисления по методу Данилевского.

Пример 2. Методом Данилевского развернуть характеристический определитель матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1 & 1\\ 5 & -4 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Решение. Записываем вычисления в таблицу (см. табл. 5.6).

Таблица 5.6

Строки	M^{-1}	Столбцы 1	2	3	4	Σ	Σ'
1		3	−2	1	−1	1	
2		3	−2	1	1	3	
3		5	−4	2	0	3	
4		−1	−1	$\boxed{1}$	1	0	
I	M_3 / M_3^{-1}	1	1	1 | −1	−1	0	
5	−1	4	−1	1	−2	2	1
6	−1	4	−1	1	0	4	3
7	1	7	−2	2	−2	5	3
8	1	0	0	1	0	1	0
7′		−1	$\boxed{0}$	1	0	0	

Выделяемый элемент $c_{32}=0$; продолжать вычисления по схеме Данилевского нельзя. Так как $c_{31}\neq 0$, то переставляем второй и первый столбцы, первую и вторую строки матрицы C и продолжаем вычисления (см. табл. 5.7 на стр. 230).

В результате получаем матрицу Фробениуса

$$F\backsim A=\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

откуда находим

$$D(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\det(F-\lambda E)=\lambda^4-4\lambda^3+4\lambda^2-2\lambda+2.$$

Таблица 5.7

Строки	M^{-1}	Столбцы 1	2	3	4	Σ	Σ'
5	−1	−1	4	1	0	4	
6	−1	−1	4	1	−2	2	
7′	1	0	$\boxed{-1}$	1	0	0	
8	1	0	0	1	0	1	
II	M_2 \ M_2^{-1}	0	−1	1	0	0	
9	0	−1	−4	5	0	0	4
10	−1	−1	−4	5	−2	−2	2
11	1	0	1	0	0	1	0
12	0	0	0	1	0	1	0
10′		$\boxed{1}$	5	−5	2	3	
III	M_1 \ M_1^{-1}	1 | −1	−5	5	−2	−3	
13	1	−1	1	0	2	2	3
14	5	1	0	0	0	1	0
15	−5	0	1	0	0	1	0
16	2	0	0	1	0	1	0
13′		4	−4	2	2	4	

Второй случай. Пусть $d_{kl} = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, k-1)$, т. е. выделяемый элемент, а также все элементы матрицы, стоящие левее выделяемого, равны нулю. Тогда матрица D имеет вид

$$D = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1,k-1} & d_{1k} & \ldots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\
d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2,k-1} & d_{2k} & \ldots & d_{2,n-1} & d_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
d_{k-1,1} & d_{k-1,2} & \ldots & d_{k-1,k-1} & d_{k-1,k} & \ldots & d_{k-1,n-1} & d_{k-1,n} \\
\hline
0 & 0 & \ldots & 0 & d_{kk} & \ldots & d_{k,n-1} & d_{kn} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0
\end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} D_1 & D_2 \\ \hline 0 & D_3 \end{array}\right].$$

Разбиваем матрицу D на четыре клетки так, чтобы одна матрица была нулевой. Тогда характеристический определитель $\det (D - \lambda E)$ распадается на два определителя:

$$\det (D - \lambda E) = \det (D_1 - \lambda E) \cdot \det (D_3 - \lambda E),$$

но матрица D_3 уже имеет вид Фробениуса, поэтому остается только привести к этому виду матрицу D_1.

Пример 3. Методом Данилевского развернуть характеристический определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Запишем результаты вычислений в таблицу (см. табл. 5.8).

Таблица 5.8

Строки	M^{-1}	Столбцы 1	2	3	4	Σ	Σ'
1		0	1	3	2	6	
2		1	4	5	0	10	
3		1	1	2	1	5	
4		1	1	$\boxed{1}$	1	4	
I	M_3 / M_3^{-1}	−1	−1	1 | −1	−1	−4	
5	1	−3	−2	3	−1	−3	−6
6	1	−4	−1	5	−5	−5	−10
7	1	−1	−1	2	−1	−1	−3
8	1	0	0	1	0	1	0
7′		−8	$\boxed{-4}$	11	−7	−8	
II	M_2 / M_2^{-1}	−2	−0,25 | −1	2,75	−1,75	−2	
9	−8	1	0,5	−2,5	2,5	1,5	1
10	−4	−2	0,25	2,25	−3,25	−2,75	−3
11	11	0	1	0	0	1	0
12	−7	0	0	1	0	1	0
10′		$\boxed{0}$	6	4	−7	3	

Так как выделяемый элемент равен нулю, то продолжать вычисления по схеме Данилевского нельзя.

Матрица $D \backsim C$ имеет вид

$$D=\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0{,}5 & -2{,}5 & 2{,}5 \\ \hline 0 & 6 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Разбиваем матрицу D на четыре клетки окаймлением и вычисляем $D(\lambda)$:

$$D(\lambda)=\det(D-\lambda E)=\left|\begin{array}{c|ccc} 1-\lambda & 0{,}5 & -2{,}5 & 2{,}5 \\ \hline 0 & 6-\lambda & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{array}\right|=$$

$$=(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 & -7 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)[(6-\lambda)\lambda^2+4\lambda-7]=\lambda^4-7\lambda^3+2\lambda^2+11\lambda-7.$$

§ 5.6. Вычисление собственных векторов по методу Данилевского

Пусть $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — собственный вектор матрицы Фробениуса F, соответствующий данному значению λ. Тогда $FY=\lambda Y$, откуда $(F-\lambda E)Y=0$, или

$$\begin{bmatrix} f_{11}-\lambda & f_{12} & f_{13} & \ldots & f_{1n} \\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=0. \qquad (1)$$

Произведя умножение, получим систему для определения координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ собственного вектора Y:

$$\left\{\begin{array}{l} (f_{11}-\lambda)y_1+f_{12}y_2+f_{13}y_3+\ldots+f_{1n}y_n=0, \\ y_1-\lambda y_2=0, \\ y_2-\lambda y_3=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}-\lambda y_n=0. \end{array}\right. \qquad (1')$$

Эта система линейных уравнений является однородной, так как все ее свободные члены равны нулю.

С точностью до коэффициента пропорциональности ее решения можно найти следующим образом. Положим $y_n=1$, тогда последовательно получим

$$y_{n-1}=\lambda,\ y_{n-2}=\lambda y_{n-1}=\lambda^2, \ldots, y_1=\lambda^{n-1}.$$

Таким образом, искомый собственный вектор есть

$$Y=\begin{bmatrix}\lambda^{n-1}\\ \lambda^{n-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Так как матрица F подобна матрице A, то λ является также и собственным значением матрицы A.

Обозначим через $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ собственный вектор матрицы A, соответствующий значению λ. Тогда получим

$$X = M_{n-1}M_{n-2}\ldots M_2M_1Y, \tag{3}$$

где $M_{n-1}, M_{n-2}, \ldots, M_1$ — преобразованные по методу Данилевского единичные матрицы.

Например, преобразование M_1, произведенное над Y, дает

$$M_1Y=\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n}\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n} m_{1k}y_k\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n} m_{1k}y_k\\ \lambda^{n-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}.$$

Следовательно, преобразование M_1 изменяет лишь первую координату вектора Y. Аналогично преобразование M_2 изменит лишь вторую координату вектора M_1Y и т. д. Повторив этот процесс $n-1$ раз, получим искомый собственный вектор X матрицы A.

Пример. В примере 1 § 5.5 было показано, что матрица

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

методом Данилевского приводится к виду Фробениуса

$$F=\begin{bmatrix}-3 & 7 & 24 & 15\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Вычислить собственный вектор $X^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, если $\lambda_1 = -1$.

Решение. Воспользуемся формулой (3), т. е. $X = M_3M_2M_1Y$, где

$$Y=\begin{bmatrix}\lambda^3\\ \lambda^2\\ \lambda\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -1\\ 1\end{bmatrix},$$

а матрицы M_3, M_2, M_1 берем из табл. 5.5 (см. стр. 224). Последовательно находим

$$M_1Y=\begin{bmatrix} -0,167 & 0 & 3,167 & 1,500 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1,500 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$M_2M_1Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1,5 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1,5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$X^{(1)}=M_3M_2M_1Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1,5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1,5 \\ 2 \\ 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично можно вычислить собственные векторы и для значений λ_2, λ_3, λ_4.

§ 5.7. Метод Леверрье — Фаддеева

Этот метод предложен Леверрье и затем упрощен советским математиком Фаддеевым. *Метод Леверрье* основан на формулах Ньютона для сумм степеней корней алгебраического уравнения и заключается в следующем. Пусть

$$\det(A-\lambda E)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_n \tag{1}$$

— характеристический многочлен матрицы $A=[a_{ij}]$ (где $i=1, 2,\ldots$ $\ldots,n$, $j=1, 2, \ldots,n$) и $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ — полная совокупность корней многочлена (1). Рассмотрим суммы

$$S_k=\lambda_1^k+\lambda_2^k+\ldots+\lambda_n^k \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

т. е.

$$\begin{aligned} S_1&=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=\operatorname{Sp}A, \\ S_2&=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2=\operatorname{Sp}A^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_n&=\lambda_1^n+\lambda_2^n+\ldots+\lambda_n^n=\operatorname{Sp}A^n \end{aligned}$$

(каждая сумма S_k есть след матрицы A^k). Тогда при $k\leqslant n$ справедливы *формулы Ньютона*

$$S_k+p_1S_{k-1}+\ldots+p_{k-1}S_1=-kp_k,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} &\text{при } k=1 \quad p_1=-S_1, \\ &\text{при } k=2 \quad p_2=-\frac{1}{2}(S_2+p_1S_1), \qquad\qquad (2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\text{при } k=n \quad p_n=-\frac{1}{n}(S_n+p_1S_{n-1}+p_2S_{n-2}+\ldots+p_{n-1}S_1). \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты характеристического многочлена $p_1, p_2, \ldots, p_n$ можно легко определить, если известны суммы $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Таким образом, схема раскрытия характеристического определителя методом Леверрье состоит в следующем:

1) вычисляют степени $A^k = A^{k-1} \cdot A$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

2) определяют S_k — суммы элементов главных диагоналей матриц A^k;

3) по формулам (2) находят коэффициенты p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Видоизмененный метод Леверрье, предложенный Фаддеевым, заключается в вычислении последовательности матриц $A_1, A_2, \ldots, A_n$ по следующей схеме:

$$
\begin{array}{lll}
A_1 = A; & \operatorname{Sp} A_1 = q_1; & B_1 = A_1 - q_1 E; \\
A_2 = AB_1; & \dfrac{\operatorname{Sp} A_2}{2} = q_2; & B_2 = A_2 - q_2 E; \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
A_{n-1} = AB_{n-2}; & \dfrac{\operatorname{Sp} A_{n-1}}{n-1} = q_{n-1}; & B_{n-1} = A_{n-1} - q_{n-1} E; \\
A_n = AB_{n-1}; & \dfrac{\operatorname{Sp} A_n}{n} = q_n; & B_n = A_n - q_n E \ (B_n \text{ — нулевая матрица});
\end{array}
$$

$$q_1 = -p_1;\ q_2 = -p_2;\ \ldots;\ q_{n-1} = -p_{n-1},\ q_n = -p_n.$$

Пример. Методом Леверрье — Фаддеева развернуть характеристический определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Последовательно находим

$$1)\quad A_1 = A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad q_1 = 2+2+3 = 7;$$

$$B_1 = A_1 - q_1 E = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \end{bmatrix};$$

$$2)\quad A_2 = AB_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -9 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 15 \\ 6 & 10 & -6 & -15 \\ -3 & -13 & -9 & 9 \end{bmatrix};$$

$$q_2=\frac{\mathrm{Sp}\,A_2}{2}=\frac{-7-2-6+9}{2}=-3;\quad B_2=A_2-q_2E=\begin{bmatrix}-4&-9&1&1\\0&1&2&-15\\6&10&-3&-15\\-3&-13&-9&12\end{bmatrix};$$

3) $$A_3=AB_2=\begin{bmatrix}2&2&-2&-1\\1&2&-1&2\\-1&0&3&4\\1&3&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4&-9&1&1\\0&1&2&-15\\6&10&-3&-15\\-3&-13&-9&12\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-17&-23&21&-10\\-16&-43&-10&-10\\10&-13&-46&2\\2&4&4&-59\end{bmatrix};$$

$$q_3=\frac{\mathrm{Sp}\,A_3}{3}=\frac{-17-43-46-59}{3}=-55;$$

$$B_3=A_3-q_3E=\begin{bmatrix}38&-23&21&-10\\-16&12&-10&10\\10&-13&9&2\\2&4&4&-4\end{bmatrix};$$

4) $$A_4=AB_3=\begin{bmatrix}2&2&-2&-1\\1&2&-1&2\\-1&0&3&4\\1&3&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}38&-23&21&-10\\-16&12&-10&10\\10&-13&9&2\\2&4&4&-4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}22&0&0&0\\0&22&0&0\\0&0&22&0\\0&0&0&22\end{bmatrix};$$

$$q_4=\frac{\mathrm{Sp}\,A_4}{4}=\frac{22+22+22+22}{4}=22,\quad B_4=A_4-q_4E=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

5) Таким образом, $p_1=-q_1=-7$, $p_2=-q_2=3$, $p_3=-q_3=55$, $p_4=-q_4=-22$ и окончательно находим

$$D(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\lambda^4-7\lambda^3+3\lambda^2+55\lambda-22.$$

§ 5.8. Метод интерполяции

Используя интерполирование, можно развернуть характеристический определитель

$$D(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\ldots+p_n,$$

где $A=[a_{ij}]$, $i=1, 2,\ldots, n$; $j=1, 2,\ldots, n$, по следующей схеме:

1) выберем равноотстоящие узлы: $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1$; $\lambda_2=2,\ldots,\lambda_n=n$ и для определителя $D(\lambda)$ вычислим соответствующие значения $D(0)$, $D(1)$, $D(2),\ldots, D(n)$;

2) составим горизонтальную таблицу разностей для последовательности чисел D_0, D_1, $D_2, \ldots, D_n$ и обычными приемами находим разности $\Delta^i D(0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

3) применяя первую интерполяционную формулу Ньютона, получим полиномиальное выражение для характеристического определителя

$$D(\lambda) = D(0) + \frac{\Delta D(0)}{1!}\lambda + \frac{\Delta^2 D(0)}{2!}\lambda(\lambda-1) + \tag{1}$$
$$+ \frac{\Delta^3 D(0)}{3!}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \ldots + \frac{\Delta^n D(0)}{n!}\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-i+1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Например, для определителя четвертого порядка формула (1) примет вид

$$D(\lambda) = D(0) + \Delta D(0)\cdot\lambda + \Delta^2 D(0)\cdot\left(\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda\right) +$$
$$+ \Delta^3 D(0)\cdot\left(\frac{1}{6}\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda\right) +$$
$$+ \Delta^4 D(0)\cdot\left(\frac{1}{24}\lambda^4 - \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{11}{24}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda\right) = \tag{2}$$
$$= D(0) + \left[\Delta D(0) - \frac{1}{2}\Delta^2 D(0) + \frac{1}{3}\Delta^3 D(0) - \frac{1}{4}\Delta^4 D(0)\right]\lambda +$$
$$+ \left[\frac{1}{2}\Delta^2 D(0) - \frac{1}{2}\Delta^3 D(0) + \frac{11}{24}\Delta^4 D(0)\right]\lambda^2 +$$
$$+ \left[\frac{1}{6}\Delta^3 D(0) - \frac{1}{4}\Delta^4 D(0)\right]\lambda^3 + \frac{1}{24}\Delta^4 D(0)\lambda^4.$$

Обозначим в формуле (1) коэффициенты в узлах интерполяции через c_{mi}, где $m = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда получим *интерполяционную формулу Маркова* для развертывания характеристического определителя:

$$D(\lambda) = D(0) + \sum_{m=1}^{n}\lambda^m\cdot\sum_{=m}^{n} c_{mi}\Delta^i D(0), \tag{1'}$$

а для определителя четвертого порядка формула Маркова запишется так:

$$D(\lambda) = D(0) + [c_{11}\Delta D(0) + c_{12}\Delta^2 D(0) + c_{13}\Delta^3 D(0) +$$
$$+ c_{14}\Delta^4 D(0)]\lambda + [c_{22}\Delta^2 D(0) + c_{23}\Delta^3 D(0) + c_{24}\Delta^4 D(0)]\lambda^2 + \tag{2'}$$
$$+ [c_{33}\Delta^3 D(0) + c_{34}\Delta^3 D(0)]\lambda^3 + c_{44}\Delta^4 D(0)\lambda^4.$$

Коэффициенты c_{mi} постоянные и вычисляются по формуле

$$\sum_{m=1}^{i} c_{mi}\lambda^m = \frac{\lambda(\lambda-1)\ .\ (\lambda-i+1)}{i!} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Так как

$$\frac{\lambda}{1!}=\lambda,\quad \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}=\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda}{2},\quad \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}=\frac{\lambda^3}{6}-\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda}{3},$$

$$\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{4!}=\frac{\lambda^4}{24}-\frac{\lambda^3}{4}+\frac{11\lambda^2}{24}-\frac{\lambda}{4},$$

то из формулы (3) находим коэффициенты c_{mi} для матрицы четвертого порядка:

$$c_{11}=1,\quad c_{12}=-\frac{1}{2},\quad c_{13}=-\frac{1}{3},\quad c_{14}=-\frac{1}{4},$$

$$c_{22}=\frac{1}{2},\quad c_{23}=-\frac{1}{2},\quad c_{24}=\frac{11}{24};$$

$$c_{33}=\frac{1}{6},\quad c_{34}=-\frac{1}{4};\quad c_{44}=\frac{1}{24}.$$

Аналогичным образом вычисляются коэффициенты c_{mi} и для матриц любых порядков.

Пример. Методом интерполяции развернуть характеристический определитель матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1) Для узлов интерполяции $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1$; $\lambda_2=2$; $\lambda_3=3$; $\lambda_4=4$. Вычисляем соответственно $D(0)$; $D(1)$; $D(2)$, $D(3)$, $D(4)$:

$$D(0)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-22;\quad D(1)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=30;$$

$$D(2)=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=60;\quad D(3)=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}=62;$$

$$D(4)=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}=54.$$

2) Составляем горизонтальную таблицу разностей и определяем $\Delta^i D(0)$ (где $i=1, 2, 3, 4$).

Таблица 5.9

λ	$D(\lambda)$	$\Delta D(\lambda)$	$\Delta^2 D(\lambda)$	$\Delta^3 D(\lambda)$	$\Delta^4 D(\lambda)$
0	-22	52	-22	-6	24
1	30	30	-28	18	
2	60	2	-10		
3	62	-8			
4	54				

3) По формуле Маркова находим:

$$D(\lambda)=D(0)+[c_{11}\Delta D(0)+c_{12}\Delta^2 D(0)+c_{13}\Delta^3 D(0)+c_{14}\Delta^4 D(0)]\lambda+$$
$$+[c_{22}\Delta^2 D(0)+c_{23}\Delta^3 D(0)+c_{24}\Delta^4 D(0)]\lambda^2+[c_{33}\Delta^3 D(0)+c_{34}\Delta^4 D(0)]\lambda^3+$$
$$+c_{44}\Delta^4 D(0)=-22+\left[52+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-22)+\frac{1}{3}\cdot(-6)+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 24\right]\lambda+$$
$$+\left[\frac{1}{2}\cdot(-22)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-6)+\frac{11}{24}\cdot 24\right]\lambda^2+$$
$$+\left[\frac{1}{6}\cdot(-6)+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 24\right]\lambda^3+\frac{1}{24}\cdot 24\lambda^4=\lambda^4-7\lambda^3+3\lambda^2+55\lambda-22.$$

§ 5.9. Определение первого собственного числа матрицы методом итерации

С помощью итерационных методов можно определить наибольшее по модулю собственное число матрицы A без раскрытия характеристического определителя.

Пусть

$$\det(A-\lambda E)=0 \tag{1}$$

— характеристическое уравнение; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — его корни, являющиеся собственными значениями матрицы $A=[a_{ij}]$ (где $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$). Предположим, что

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geqslant|\lambda_3|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_n|,$$

т. е. λ_1 — наибольшее по модулю собственное число.

Тогда для нахождения приближенного значения корня используется следующая схема:

1) выбирают произвольно начальный вектор Y;

2) составляют последовательные итерации

$$\begin{aligned}
Y^{(1)}&=AY,\\
Y^{(2)}&=A\cdot AY=A^2Y,\\
Y^{(3)}&=A\cdot A^2Y=A^3Y,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y^{(m)}&=A\cdot A^{m-1}Y=A^mY,\\
Y^{(m+1)}&=A\cdot A^mY=A^{m+1}Y;
\end{aligned}$$

3) выбирают из последовательности два последних значения $Y^{(m)} = A^m Y$ и $Y^{(m+1)} = A^{m+1} Y$; тогда

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{y_i^{(m+1)}}{y_i^{(m)}}, \text{ или } \lambda_1 \approx \frac{y_i^{(m+1)}}{y_i^{(m)}}, \tag{2}$$

где $y_i^{(m+1)}$ и $y_i^{(m)}$ — соответствующие координаты векторов $Y^{(m+1)}$ и $Y^{(m)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Таким образом, взяв достаточно большой номер итерации m, можно с любой степенью точности вычислить наибольший по модулю корень λ_1 характеристического уравнения матрицы. Для нахождения этого корня может быть использована любая координата вектора $Y^{(m)}$, в частности можно взять среднее арифметическое соответствующих отношений для разных координат.

При неудачном выборе начального вектора Y формула (2) может не дать нужного корня или даже вообще не иметь смысла, т. е. предел отношения $y_i^{(m+1)}/y_i^{(m)}$ может не существовать. Последнее легко заметить по «прыгающим» значениям этого отношения. В таких случаях следует изменить начальный вектор. В качестве первого собственного вектора можно взять $Y^{(m+1)}$.

Пример. Найти наибольшее по модулю собственное значение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и соответствующий ему собственный вектор.

Решение. 1) Выбираем начальный вектор $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2) Составляем $m = 10$ итераций

$$Y^{(1)} = AY, \quad Y^{(2)} = A^2 Y, \ldots, \quad Y^{(10)} = A^{10} Y.$$

Вычисления помещаем в таблицу (см. табл. 5.10).

Таблица 5.10

Y	AY	A^2Y	A^3Y	A^4Y	A^5Y	A^6Y	A^7Y	A^8Y	A^9Y	$A^{10}Y$
1	4	17	69	274	1 075	4 189	16 260	62 973	243 569	941 370
1	5	18	67	253	964	3 693	24 193	54 650	210 663	812 585
1	2	17	25	92	345	1 309	5 002	19 195	73 845	284 508

3) Закончив итерации на $Y^{(10)} = A^{10}Y$, имеем для разных координат

$$\lambda_1 \approx \frac{y_1^{(10)}}{y_1^{(9)}} = \frac{941\,370}{243\,569} = 3,865; \quad \lambda_1^{(2)} \approx \frac{y_2^{(10)}}{y_2^{(9)}} = \frac{812\,585}{210\,663} = 3,857;$$

$$\lambda_1^{3} \approx \frac{y_3^{(10)}}{y_3^{(9)}} = \frac{284\,508}{73\,845} = 3,853.$$

4) Вычисляем λ_1 как среднее арифметическое $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_1^{(3)}$:

$$\lambda_1=\frac{\lambda_1^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_1^{(3)}}{3}=\frac{3,865+3,857+3,853}{3}=3,858.$$

5) В качестве первого собственного вектора матрицы A можно взять вектор $Y^{(10)}=A^{10}Y=\begin{bmatrix}941370\\812585\\284508\end{bmatrix}$. Нормируя его, т. е. разделив все его координаты на норму вектора, равную

$$\|Y^{(10)}\|_3=\sqrt{941370^2+812585^2+284508^2}=1,28\cdot 10^6,$$

получим первый собственный вектор матрицы A, принадлежащий первому собственному значению $\lambda_1=3,858$:

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix}0,74\\0,64\\0,22\end{bmatrix}.$$

§5.10. Определение последующих собственных чисел и принадлежащих им собственных векторов

Пусть собственные значения матрицы A таковы, что

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_n|. \tag{1}$$

Тогда для определения λ_2 мы можем воспользоваться так называемыми λ-*разностями*, используя уже имеющееся значение λ_1:

$$\Delta_{\lambda_1}A^mY\equiv A^{m+1}Y-\lambda_1A^mY,\quad \Delta_{\lambda_1}A^{m-1}Y=A^mY-\lambda_1A^{m-1}Y,$$

или

$$\Delta_{\lambda_1}Y^{(m)}=Y^{(m+1)}-\lambda_1Y^{(m)},\quad \Delta_{\lambda_1}Y^{(m-1)}=Y^{(m)}-\lambda_1Y^{(m-1)}, \tag{2}$$

откуда, переходя к координатам векторов, получаем

$$\lambda_2\approx\frac{\Delta_{\lambda_1}y_i^{(m)}}{\Delta_{\lambda_1}y_i^{(m-1)}}=\frac{y_i^{(m+1)}-\lambda_1y_i^{(m)}}{y_i^{(m)}-\lambda_1y_i^{(m-1)}}\qquad(i=1,2,\ldots,n) \tag{3}$$

Формула (3) дает грубые значения для λ_2, так как λ_1 тоже было определено приближенно.

Если модули всех собственных значений различны между собой, то при помощи формул, аналогичных формуле (3), можно вычислить и остальные собственные значения, но последующие результаты будут еще менее точны.

Номер итерации m при вычислении λ_2 следует брать меньшим, чем при вычислении λ_1, во избежание потери точности при вычитании близких чисел.

Пример. Для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

найти второе собственное значение λ_2 и принадлежащий ему собственный вектор $X^{(2)}$. *За номер итерации принять* $m=8$.

Решение. Воспользуемся таблицей значений A^mY для $m=7,\ 8,\ 9$ (см. табл. 5.10 на стр. 240):

A^7Y	A^8Y	A^9Y
16 260	62 973	243 569
14 193	54 650	210 663
5 002	19 195	73 845

По формуле (2) составляем λ-разности:

$$\Delta_{\lambda_1} Y_i^{(m)} = Y_i^{(m+1)} - \lambda_1 Y_i^{(m)} \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Для каждой из строк принимается свое значение λ_1:

$$\lambda_1^{(1)}=3,865;\quad \lambda_1^{(2)}=3,857;\quad \lambda_1^{(3)}=3,853.$$

Получаем следующую таблицу:

Таблица 5.11

A^8Y	$\lambda_1 A^7Y$	$\Delta_{\lambda_1}A^7Y$	A^9Y	$\lambda_1 A^8Y$	$\Delta_{\lambda_1}A^8Y$
62 973	62 845	128	243 569	243 390	179
54 650	54 742	−92	210 663	210 785	−122
19 195	19 272	−77	73 845	73 958	−113

3) Для каждой строки по формуле (3) вычисляем λ_2:

$$\lambda_2^{(1)} \approx \frac{\Delta_{\lambda_1} y_1^{(8)}}{\Delta_{\lambda_1} y_1^{(7)}} = \frac{179}{128} = 1,400;\quad \lambda_2^{(2)} \approx \frac{\Delta_{\lambda_1} y_2^{(8)}}{\Delta_{\lambda_1} y_2^{(7)}} = \frac{-122}{-92} = 1,326;$$

$$\lambda_2^{(3)} \approx \frac{\Delta_{\lambda_1} y_3^{(8)}}{\Delta_{\lambda_1} y_3^{(7)}} = \frac{-113}{-77} = 1,468.$$

4) Определяем λ_2 как среднее арифметическое $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_2^{(2)}$ и $\lambda_2^{(3)}$:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_2^{(1)}+\lambda_2^{(2)}+\lambda_2^{(3)}}{3} = \frac{1,400+1,326+1,468}{3} = 1,398.$$

5) В качестве второго собственного вектора принимаем

$$X^{(2)} = \Delta_{\lambda_1} A^8Y = \begin{bmatrix} 179 \\ -122 \\ -113 \end{bmatrix}.$$

Нормируя его, имеем

$$X^{(2)}=\begin{bmatrix} 0,73 \\ -0,50 \\ -0,46 \end{bmatrix}.$$

Для данной матрицы третье собственное значение можно найти, зная след матрицы: так как $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{Sp}\ A=3+2+1=6$, то $\lambda_3\approx 6-3{,}858-1{,}398=0{,}744$.

Упражнения

1. Методом непосредственного развертывания найти характеристические многочлены для следующих матриц:

$$\text{а)}\quad A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix};\quad \text{б)}\ A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)}\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответы: а) $\lambda^3-2\lambda^2-66\lambda+1$; б) $\lambda^4-4\lambda^3-6\lambda-41$; в) $\lambda^4-4\lambda^3+16\lambda-16$.

2. Методом Крылова развернуть характеристические определители следующих матриц:

$$\text{а)}\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix};\quad \text{б)}\ A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)}\quad A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответы: а) $\lambda^3+\lambda^2-3\lambda-7$; б) $\lambda^4+8\lambda^3+6\lambda^2+6\lambda-54$; в) $\lambda^4+\lambda^3-6\lambda^2-18\lambda$.

3. Применяя вычислительную схему Данилевского, развернуть характеристические определители следующих матриц:

$$\text{а)}\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix};\quad \text{б)}\ A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)}\quad A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -1 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответы: а) $\lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4$; б) $\lambda^4 + \lambda^3 - 11\lambda^2 + 14\lambda - 16$; в) $\lambda^4 - \lambda^3 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 12$.

4. Для матрицы из упр. **3** а) вычислить собственные векторы методом Данилевского, если $\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$.

Ответ: $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -14 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. Методом Леверрье — Фаддеева развернуть характеристические определители для следующих матриц:

$$\text{а)}\quad A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix};\quad \text{б)}\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответы: а) $\lambda^4 - 7\lambda^3 + 15\lambda^2 - 2\lambda - 34$; б) $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 9\lambda^2 - 25\lambda + 17$.

6. Методом интерполяции развернуть характеристические определители для следующих матриц:

$$\text{а)}\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix};\quad \text{б)}\quad A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ответы: а) $\lambda^4 + \lambda^3 + 7\lambda^2 - 20\lambda - 54$; б) $\lambda^4 - 6\lambda^3 - 9\lambda^2 + 55\lambda + 61$.

7. Методом итерации вычислить первое и второе собственное значение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1 \approx 4{,}46$; $\lambda_2 \approx 1{,}59$.

Глава VI

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ

§ 6.1. Постановка задачи

Анализ экономических и технических процессов приводит к необходимости выявления существенных факторов, влияющих на исследуемый процесс, а также к выбору формы связи между факторами и к оценке параметров полученных уравнений связи.

Будем считать, что некоторое явление характеризуется двумя варьируемыми величинами x и y, из которых x выбирается как независимая, а y — как зависимая переменная величина. Предположим, что между переменными x и y существует однозначное соответствие, т. е. каждому значению независимой переменной величины x соответствует с заданной степенью точности одно значение зависимой переменной.

Рассмотрим в качестве примера индексы производительности труда промышленно-производственного персонала в государственной и кооперативной промышленности стран членов СЭВ (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Страны	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
Болгария..	264	274	295	322	343	467	390
Венгрия...	187	197	207	210	209	222	234
ГДР.......	184	195	206	217	229	243	256
Польша....	287	298	309	326	343	367	384
Румыния...	343	372	407	435	456	486	516
СССР......	256	269	287	302	316	338	360
Чехословакия.	238	263	263	274	286	309	330

В табл. 6.1 независимой переменной величиной является время. В наших обозначениях это переменная x. Зависимой переменной служит индекс цен соответствующей страны.

В качестве другого примера рассмотрим изменение производственных фондов по годам (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Годы	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Производственные фонды (в млрд. руб.).	420	454	494	534	571	625

В табл. 6.2 независимой переменной также является время x, а зависимой — производственные фонды y. Таким образом, производственные фонды являются функцией времени: $y = f(x)$. Вид этой функции пока еще неизвестен.

В качестве третьего примера рассмотрим численность учащихся средних учебных заведений в расчете на 10 тыс. человек населения (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Годы	1961	1962	1963	1964	1965	1966
Число учащихся	50	71	90	110	145	158

В табл. 6.3 функциональная зависимость числа учащихся от изменения времени почти очевидна, хотя вид этой связи $y=f(x)$ надо найти.

Итак, во всех рассмотренных примерах возникает одна и та же задача — выявление формы связи и определение формульной зависимости, задающей y как функцию $f(x)$.

В общем виде задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть в результате исследования некоторой величины x значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ поставлены в соответствие значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ некоторой величины y. Требуется подобрать вид аналитической зависимости $y=f(x)$, связывающей переменные x и y.

Будем называть аналитические зависимости, полученные в результате наблюдений, *эмпирическими*. Выявление эмпирических зависимостей делится на два основных этапа — выбор эмпирической формулы и уточнение коэффициентов выбранной формулы.

Для второго этапа мы рассмотрим три наиболее распространенных метода определения коэффициентов формульных зависимостей: 1) *метод выбранных точек*; 2) *метод средних*; 3) *метод наименьших квадратов*.

§ 6.2. Построение эмпирических линейных зависимостей. Методы уточнения параметров этих зависимостей

Построение зависимости $y=ax$. Рассмотрим следующую задачу. Пусть на некотором предприятии в течение шестичасового рабочего дня поступают сведения о количестве выпускаемых изделий (табл. 6.4). Требуется выявить вид эмпирической зависимости и вычислить параметры этой зависимости.

Таблица 6.4

Текущий час	0	1	1,5	2,5	3	4,5	5	6
Количество изделий на x_i-й час	0	67	101	168	202	301	334	404

Нанесем точки из табл. 6.4 на график (рис. 6.1). Вид математической зависимости количества выпускаемых изделий от времени наглядно иллюстрируется графиком. Это прямая, проходящая через начало координат. Таким образом, искомая зависимость является линейной; ее математический вид

$$y = ax. \quad (1)$$

Определив вид формы связи между переменными x и y, вычислим параметр a. Для уточнения параметра a воспользуемся перечисленными выше тремя методами.

1. Метод выбранных точек. Проведем прямую как можно ближе к нанесенным на график точкам (рис. 6.1). На этой прямой выбираем произвольную точку M (x^*; y^*), координаты которой определим из графика. Пусть $x^* = 5,6$; отсюда $y^* = 375$ и можно найти параметр a эмпирической формулы (1): $a = \frac{375}{5,6} = 66,96$. Тогда уравнение прямой, проходящей через начало координат, примет вид $y = 66,96\,x$.

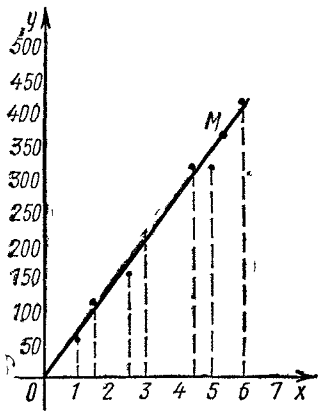


Рис. 6.1

Итак, чтобы вычислить параметр a для прямой, проходящей через начало координат, достаточно взять произвольную точку на эмпирической прямой и поделить ее координаты y и x, т. е.

$$a = \frac{y}{x}. \qquad (2)$$

Преимуществом метода выбранных точек является то, что он обладает хорошей наглядностью, однако выбор коэффициента a существенно зависит от точности построения чертежа.

Лучшие результаты по сравнению с методом выбранных точек дает метод средних.

2. Метод средних. Каждому табличному значению независимой переменной соответствует определенное значение эмпирической функции, которое численно можно получить из графика $y = ax$.

Обозначим значения зависимой переменной, взятые из эмпирического графика, через y^*. В тех случаях, когда для соответствующих x_i табличные значения y_i не совпадают с графическими y^*, имеет место отклонение экспериментальных данных от выбранной функциональной эмпирической зависимости:

$$y_i - y_i^* = \varepsilon_i, \qquad (3)$$

где $y_i = ax_i$. Определим параметр a из условия минимума средней ошибки:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0, \qquad (4)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i) = 0. \qquad (4')$$

Перепишем выражение (4′) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} ax_i = 0,$$

откуда

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}. \tag{5}$$

Таким образом, для линейной функции $y = ax$, проходящей через начало координат, параметр a определяется с помощью метода средних по формуле (5).

Пользуясь этой формулой, найдем численное значение параметра a для рассматриваемой эмпирической зависимости (см. табл. 6.4):

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{7} y_i}{\sum_{i=1}^{7} x_i} = \frac{67+101+168+202+301+334+404}{1+1,5+2,5+3+4,5+5+6} = \frac{1577}{23,5} = 67,11.$$

Следовательно, искомая зависимость имеет вид $y = 67,11\,x$.

3. Метод наименьших квадратов. Определим значение параметра a линейной зависимости $y = ax$ из условия минимума суммы квадратов отклонений табличных значений y_i от эмпирических y_i^*:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \min, \tag{6}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2 = \min. \tag{6′}$$

Выразим y_i^* через его значение ax_i и подставим в соотношение (6′); тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)^2 = \min. \tag{6″}$$

Условие (6″), согласно которому мы будем вычислять параметр a, включает все табличные значения зависимой и независимой переменных величин x_i и y_i.

Минимальное значение суммы квадратов отклонений табличных значений y_i^* от эмпирических y_i при вариации коэффициента a найдем из условия равенства нулю производной по параметру a от функции $F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)^2$. Дифференцируя, имеем

$$\frac{dF}{da} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - ax_i) = 0. \tag{7}$$

Раскрывая скобки и представляя сумму разностей как разность сумм, получим следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,$$

откуда параметр a вычисляется как отношение суммы произведений значений независимой переменной x_i на соответствующие значения зависимой переменной y_i к сумме квадратов значений независимой переменной:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{8}$$

Чтобы воспользоваться методом наименьших квадратов для определения численного значения параметра a рассматриваемой эмпирической зависимости (см. табл. 6.4), составим вспомогательную таблицу, откуда находим сумму произведений $\sum_{i=1}^{7} x_i y_i$ и сумму квадратов $\sum_{i=1}^{7} x_i^2$.

Таблица 6.5

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	67,0	67	1
1,5	101,0	151,5	2,25
2,5	168,0	420,0	6,25
3	202,0	606,0	9
4,5	301,0	1354,5	20,25
5	334,0	1670,0	25
6	404,0	2424,0	36
		$\Sigma x_i y_i = 6\,693,0$	$\Sigma x_i^2 = 99,75$

Теперь, по формуле (8) находим

$$a = \frac{6693,0}{99,75} = 67,09.$$

Подставив найденное значение параметра в линейную функцию $y = ax$, получим $y = 67{,}09\ x$.

Итак, в результате расчетов мы получили три значения параметра a для функции $y = ax$, наиболее точным из которых является значение параметра, полученное по методу наименьших квадратов; однако наглядно убеждаемся в том, что этот метод требует большего объема вычислений.

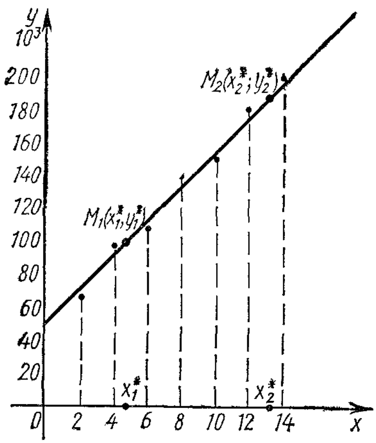


Рис. 6.2

Построение линейной зависимости общего типа $y = ax + b$. Рассмотрим следующую задачу. Подобрать эмпирическую формулу для роста численности населения в некогором городе, пользуясь данными табл. 6.6.

Нанесем табличные значения на график (рис. 6.2), из которого видно, что имеет место линейная зависимость общего типа. Ее аналитическое выражение

$$y = ax + b. \tag{9}$$

Таблица 6.6

Годы	1946	1948	1950	1952	1954	1956	1958	1960
Число жителей	50 000	68 500	92 500	110 000	132 500	152 000	175 000	195 000

Для уточнения параметров a и b воспользуемся, как и прежде, тремя различными методами.

1. Метод выбранных точек. Чтобы вычислить параметры a и b, необходимо составить систему двух линейно независимых уравнений. Выбрав на графике произвольные точки M_1 $(x_1^*;\ y_1^*)$ и M_2 $(x_2;\ y_2^*)$ и подставив численные значения координат этих точек в уравнение (9), получим систему

$$\begin{cases} y_1^* = ax_1^* + b, \\ y_2^* = ax_2^* + b. \end{cases} \tag{10}$$

Решая ее, находим искомые параметры a и b.

Так, для рассматриваемого примера выберем на гафике (рис. 6.2) точки M_1 и M_2 с координатами $x_1^* = 4{,}4$; $y_1 = 92{,}5 \cdot 10^3$; $x_2^* = 13{,}6$;

$y_2^* = 190 \cdot 10^3$. Подставляя координаты этих точек в уравнение (9), получим систему

$$\begin{cases} 92{,}5 \cdot 10^3 = 4{,}4a + b, \\ 190 \cdot 10^3 = 13{,}6a + b, \end{cases}$$

откуда найдем $a = 10\,600$, $b = 45\,000$. Тогда искомая зависимость примет вид $y = 10\,600\,x + 45\,000$.

2. Метод средних. Согласно методу средних, лучшим положением прямой является такое, для которого алгебраическая сумма всех уклонений вычисленных значений от опытных равна нулю.

Для определения параметров a и b эмпирической прямой разделим табличные данные на две группы и для каждой из них запишем:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{l} \left[y_j^{\mathrm{I}} - \left(ax_j^{\mathrm{I}} + b\right)\right] = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n-l} \left[y_k^{\mathrm{II}} - \left(ax_k^{\mathrm{II}} + b\right)\right] = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где l и $n - l$ — числа табличных данных соответственно для первой и второй группы.

Заменим сумму разностей разностью сумм и, сделав преобразования, получим

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l} y_j^{\mathrm{I}} &= a \sum_{j=1}^{l} x_j^{\mathrm{I}} + lb, \\ \sum_{k=1}^{n-l} y_k^{\mathrm{II}} &= a \sum_{k=1}^{n-l} x_k^{\mathrm{II}} + (n-l)\,b. \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

Решив эту систему, найдем параметры a и b.

Определим теперь параметры a и b с помощью метода средних в рассматриваемом примере. Разобьем данные на две такие совокупности, для которых суммы y_i примерно одинаковы (см. табл. 6.7).

Таблица 6.7

x_i	Σx_i	y_i	Σy_i
0 2 4 6 8	20	50 000 68 500 92 500 110 000 132 500	453 500
10 12 14	36	152 000 175 000 195 000	522 000

Составим систему вида (11'):

$$\begin{cases} 453\,500-5b-20a=0, \\ 522\,000-3b-36a=0, \end{cases}$$

откуда получаем $a = 11\,500$, $b = 40\,700$. Следовательно, уравнение прямой запишется так: $y = 11\,500\,x + 40\,700$.

3. Метод наименьших квадратов. Согласно методу наименьших квадратов,

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i-ax_i-b)^2=\min. \tag{12}$$

Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных при вариации параметров a и b, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i-ax_i-b)^2=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial b} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i-ax_i-b)^2=0, \end{cases} \tag{13}$$

или

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\,(y_i-ax_i-b)\,(-x_i)=0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\,(y_i-ax_i-b)\,(-1)=0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i=a\sum_{i=1}^{n} x_i^2+b\sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i=a\sum_{i=1}^{n} x_i+nb, \end{cases} \tag{13'}$$

где n — число наблюдений.

Чтобы вычислить параметры линейной зависимости для нашего примера, составим вспомогательную таблицу (см. табл. 6.8 на стр. 253).

В результате получаем систему вида (13'):

$$\begin{cases} 8553{,}5\cdot 10^3=65a+56b, \\ 965{,}5\cdot 10^3=56a+\ 8b, \end{cases}$$

решая которую, находим $a = 11\,100$, $b = 43\,000$. Следовательно, $y = 11\,100\ x + 43\,000$.

Таблица 6.8

Годы	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1946	0	50 000	0	0
1948	2	68 500	$137,5\cdot10^3$	4
1950	4	92 500	$370\cdot10^3$	16
1952	6	110 000	$661,5\cdot10^3$	36
1954	8	132 500	$1060\cdot10^3$	64
1956	10	152 000	$1522\cdot10^3$	100
1958	12	175 000	$2100\cdot10^3$	144
1960	14	195 000	$2702\cdot10^3$	196
	$\Sigma x_i = 56$	$\Sigma y_i = 965,5\cdot10^3$	$\Sigma x_i y_i = 8553,5\cdot10^3$.	$\Sigma x_i^2 = 560$

§ 6.3. Выбор эмпирических формул для нелинейных зависимостей

Выбор вида эмпирической формулы. В предыдущем параграфе мы рассмотрели эмпирические линейные зависимости, для которых построенный график определял выбор функциональной зависимости. Для прямой, проходящей через начало координат, аналитическим выражением служит функция $y = ax$, а для прямой общего положения — функция $y = ax + b$. Однако графическое построение нелинейной зависимости не дает ответа на вопрос о том, какой аналитический вид имеет эта функция, т. е. будет ли эта зависимость степенной, дробно-рациональной, логарифмической и т. д.

Пусть y есть функция одной переменной с двумя параметрами a и b. В качестве набора функций, из которых будем выбирать эмпирическую зависимость, рассмотрим:

1) линейную функцию $y = ax + b$;
2) показательную функцию $y = ab^x$;
3) дробно-рациональную функцию $y = \frac{1}{ax+b}$;
4) логарифмическую функцию $y = a\ln x + b$;
5) степенную функцию $y = ax^b$ (она определяет параболическую зависимость, если параметр $b > 0$, и гиперболическую зависимость, если $b < 0$; если же параметр $b = 0$, то зависимость вырождается в линейную);
6) гиперболическую функцию вида $y = a + \frac{b}{x}$;
7) дробно-рациональную функцию вида $y = \frac{x}{ax+b}$.

Для наилучшего выбора вида аналитической зависимости $y = f(x, a, b)$, соответствующей построенному графику, выполним следующие промежуточные вычисления. На заданном отрезке изменения независимой переменной выберем точки, достаточно надежные и по возможности далеко отстоящие друг от друга. Для простоты будем считать, что это точки x_1 и x_n. Вычислим среднее арифметическое $x_{\text{ар}} = \frac{x_1 + x_n}{2}$, среднее геометрическое $x_{\text{геом}} = \sqrt{x_1 x_n}$ и среднее гармоническое $x_{\text{гарм}} = \frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$. По вычисленным значениям незарисимой переменной найдем из построенного графика соответствующие значения зависимой переменной

$$x_{\text{ар}} \to y_1^*,$$
$$x_{\text{геом}} \to y_2^*,$$
$$x_{\text{гарм}} \to y_3^*$$

для пока еще неизвестной аналитической зависимости $y = f(x, a, b)$.

Выполним вспомогательные вычисления для зависимой переменной. Вычислим среднее арифметическое крайних значений $y_{\text{ар}} = \frac{y_1 + y_n}{2}$, их среднее геометрическое $y_{\text{геом}} = \sqrt{y_1 y_n}$ и среднее гармоническое $y_{\text{гарм}} = \frac{2\, y_1 y_n}{y_1 + y_n}$. Сравним найденные из графика y_1^*, y_2^*, y_3^* с вычисленными значениями $y_{\text{ар}}$, $y_{\text{геом}}$, $y_{\text{гарм}}$ и оценим следующие погрешности результата сравнения:

$$|y_1^* - y_{\text{ар}}| = \varepsilon_1, \quad |y_1^* - y_{\text{геом}}| = \varepsilon_2, \quad |y_1^* - y_{\text{гарм}}| = \varepsilon_3$$
$$|y_2^* - y_{\text{ар}}| = \varepsilon_4, \quad |y_2^* - y_{\text{геом}}| = \varepsilon_5, \quad |y_3^* - y_{\text{ар}}| = \varepsilon_6, \quad |y_3^* - y_{\text{гарм}}| = \varepsilon_7.$$

Найдем из этих ошибок минимальную:

$$\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_7\}.$$

1. Если наименьшей среди всех абсолютных ошибок окажется ε_1, то в качестве аналитической зависимости для данного графика хорошим приближением служит линейная функция $y = ax + b$.

2. Если наименьшей абсолютной ошибкой является ε_2, то в качестве эмпирической зависимости следует выбрать показательную функцию $y = ab^x$.

3. В том случае, когда наименьшая из абсолютных ошибок есть ε_3, искомая эмпирическая зависимость определяется дробно-рациональной функцией вида $y = \frac{1}{ax + b}$.

4. Если наименьшая из абсолютных ошибок есть ε_4, то хорошим приближением служит логарифмическая функция $y = a \ln x + b$.

5. Для случая, когда наименьшей абсолютной ошибкой является ε_5, в качестве эмпирической зависимости выбирается степенная функция $y = ax^b$.

6. Если наименьшей из абсолютных ошибок окажется ε_6, то за искомую зависимость следует выбрать гиперболическую $y = a + \frac{b}{x}$.

7. Наконец, в том случае, когда наименьшая из абсолютных ошибок есть ε_7, в качестве аналитической зависимости выбирается дробно-рациональная функция вида $y = \frac{x}{ax + b}$.

Пример. Подобрать эмпирическую зависимость для функции, заданной таблично:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	521	308	240,5	204	183	171	159	152	147

Решение. 1) Предположим, что в данном примере крайние табличные значения достаточно надежны. Проведем вспомогательные вычисления и найдем для крайних значений независимой переменной $x_1 = 1$, $x_9 = 9$ среднее арифметическое $x_{ар} = \frac{x_1 + x_9}{2} = 5$, среднее геометрическое $x_{геом} = \sqrt{x_1 x_9} = 3$ и среднее гармоническое $x_{гарм} = \frac{2x_1x_9}{x_1 + x_9} = 1{,}8$.

2) Из графика (рис. 6.3) найдем значения функции, соответствующие вычисленным значениям аргумента: для $x_{ар} = 5$ имеем $y_1 \approx 180$; для $x_{геом} = 3$ имеем $y_2^* \approx 240$; для $x_{гарм} = 1{,}8$ имеем $y_3^* \approx 341$.

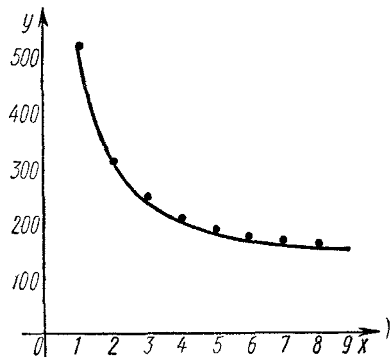


Рис. 6.3

3) Выполним дополнительные расчеты для зависимой переменной. Найдем для крайних значений среднее арифметическое

$$y_{ар} = \frac{y_1 + y_n}{2} = \frac{521 + 147}{2} = 334,$$

среднее геометрическое

$$y_{геом} = \sqrt{521 \cdot 147} = 274$$

и среднее гармоническое

$$y_{гарм} = \frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n} = \frac{2 \cdot 512 \cdot 147}{512 + 149} = 228.$$

4) Сравним найденные графически значения зависимой переменной с $y_{ар}$, $y_{геом}$ и $y_{гарм}$:

$$\varepsilon_1 = |y_1^* - y_{ар}| = |180 - 334| = 154, \quad \varepsilon_2 = |y_1^* - y_{геом}| = |180 - 274| = 106,$$
$$\varepsilon_3 = |y_1^* - y_{гарм}| = |180 - 228| = 48,$$
$$\varepsilon_4 = |y_2^* - y_{ар}| = |240 - 334| = 94, \quad \varepsilon_5 = |y_2^* - y_{геом}| = |240 - 274| = 34,$$
$$\varepsilon_6 = |y_3^* - y_{ар}| = |341 - 334| = 7, \quad \varepsilon_7 = |y_3^* - y_{гарм}| = |341 - 228| = 113.$$

Поскольку наименьшая из абсолютных ошибок есть ε_6, в качестве аналитической зависимости следует выбрать гиперболическую зависимость $y = a + \frac{b}{x}$ (см. рис. 6.3).

Уточнение коэффициентов. Для уточнения коэффициентов выбранной аналитической зависимости $y = f(x, a, b)$ воспользуемся, как и прежде, тремя различными методами.

1. Метод выбранных точек. На построенной кривой возьмем две произвольные точки $M(x_1^*; y_1^*)$ и $N(x_2^*; y_2^*)$. Составляем систему

$$\begin{cases} y_1^* = f(x_1^*, a, b), \\ y_2^* = f(x_2^*, a, b), \end{cases}$$

разрешаем ее относительно искомых параметров a и b и подставляем найденные числовые значения параметров в функцию $y = f(x, a, b)$.

2. Метод средних. В эмпирическую формулу $y = f(x, a, b)$ последовательно подставляем табличные значения x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Полученные значения функции $y_i = f(x_i, a, b)$, вообще говоря, будут отклоняться от табличных значений: $y_i - f(x_i, a_1, b) = \varepsilon_i$.

Согласно методу средних, за наилучшее положение кривой принимается то, для которого алгебраическая сумма отклонений равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a, b)] = 0.$$

Для определения параметров a и b по методу средних вся совокупность ε_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) разбивается на две группы так, чтобы алгебраическая сумма уклонений каждой группы равнялась нулю. Таким образом, для определения параметров a и b мы получаем следующую систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{l} [y_j^{\mathrm{I}} - f(x_j^{\mathrm{I}}, a, b)] = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-l} [y_k^{\mathrm{II}} - f(x_k^{\mathrm{II}}, a, b)] = 0, \end{cases}$$

где l и $n - l$ — числа табличных данных соответственно для первой и второй группы.

Заменив сумму разностей разностью сумм в каждом уравнении системы, получим

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{l} y_j^{\mathrm{I}} = \sum\limits_{j=1}^{l} f(x_j^{\mathrm{I}}, a, b), \\ \sum\limits_{k=1}^{n-l} y_k^{\mathrm{II}} = \sum\limits_{k=1}^{n-l} f(x_k^{\mathrm{II}}, a, b). \end{cases}$$

Совместное решение этой системы определяет численное значение двух параметров a и b, подставив которые в $y = f(x, a, b)$, получим искомое эмпирическое соотношение.

3. Метод наименьших квадратов. Согласно методу наименьших квадратов, наилучшими параметрами a и b считаются те, для которых сумма квадратов уклонений минимальна:

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a, b)]^2 = \min.$$

Найдем частные производные функции $F(a, b)$ по варьируемым параметрам a и b:

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a, b)] f'_a(x_i, a, b),$$

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a, b)] f'_b(x_i, a, b).$$

В силу необходимого условия экстремума функции многих переменных, наилучшими значениями параметров a и b служат те, при которых частные производные этой функции по варьируемым параметрам обращаются в нуль:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(a,\ b)}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial F(a,\ b)}{\partial b} = 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i,\ a,\ b)]\, f'_a(x_i,\ a,\ b) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i,\ a,\ b)]\, f'_b(x_i,\ a,\ b) = 0.$$

Решение этой системы относительно a и b и дает искомые наилучшие значения числовых параметров.

§ 6.4. Преобразование координат

Рассмотрим в системе координат xOy некоторую нелинейную зависимость $y = f(x,\ a,\ b)$, непрерывную и монотонную на замкнутом отрезке $[x_1,\ x_n]$. Перейдем к новым переменным $q = \varphi(x)$ и $z = \psi(y)$ так, чтобы в новой системе координат qOz эмпирическая зависимость стала линейной:

$$z = aq + b. \tag{1}$$

Точки N_i с координатами $(\varphi(x_i);\ \psi(y_i))$ в плоскости qOz практически лежат на прямой линии. Обратно, если при построении на плоскости qOz окажется, что точки лежат на прямой линии, то между переменными q и z имеет место зависимость

$$\psi(y) = a\varphi(x) + b. \tag{2}$$

Покажем, как рассмотренные в § 6.3 нелинейные зависимости преобразованием координат можно свести к линейной.

1) Для показательной зависимости вида $y = ab^x$, логарифмируя, имеем $\lg y = x \lg b + \lg a$. Полагаем $\lg b = B$, $\lg a = A$, $\lg y = z$, $x = q$ и в плоскости qOz получим уравнение прямой $z = Bq + A$.

2) Дробно-линейную зависимость $y = \dfrac{1}{ax+b}$ также можно преобразовать в линейную. Действительно, найдем обратную зависимость $\dfrac{1}{y} = ax + b$ и введем новые переменные $q = x$, $z = \dfrac{1}{y}$; тогда получим зависимость вида $z = aq + b$.

3) Рассмотрим логарифмическую зависимость $y = a \lg x + b$ и введем новые переменные $q = \lg x$, $z = y$. Тогда снова получим линейную зависимость $z = aq + b$.

4) Рассмотрим степенную зависимость $y = bx^a$, где $a > 0$, $b > 0$. Логарифмируя, находим $\lg y = a \lg x + \lg b$, откуда полагая $z = \lg y$, $q = \lg x$, $B = \lg b$, имеем $z = aq + B$. Прямую полученного вида удобно строить, если оси q и z в плоскости qOz взять в логарифмическом масштабе. Началом координат логарифмической сетки служит точка $q = 0$, $z = B$.

5) В выражении $y = a + \frac{b}{x}$ произведем замену переменных $\frac{1}{x} = q$, $y = z$. Тем самым заданная гиперболическая зависимость преобразуется в линейную $z = a + bq$.

6) Рассмотрим дробно-рациональную функцию $y = \frac{x}{ax + b}$. Функция, обратная данной, имеет вид $\frac{1}{y} = a + \frac{b}{x}$. Введя новые координаты $z = \frac{1}{y}$, $q = \frac{1}{x}$, опять получим линейную зависимость $z = a + bq$.

Пример. Опытные данные занесены в следующую таблицу:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0,33	0,49	0,59	0,65	0,71	0,755	0,77	0,81	0,82

Составить эмпирическую формулу.

Решение. Построим график (рис. 6.4) и определим тип кривой так, как это было указано в предыдущем параграфе. Аналитическая функция, достаточно

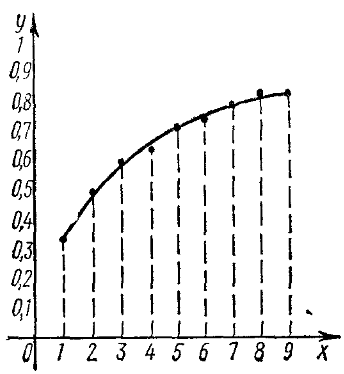


Рис. 6.4

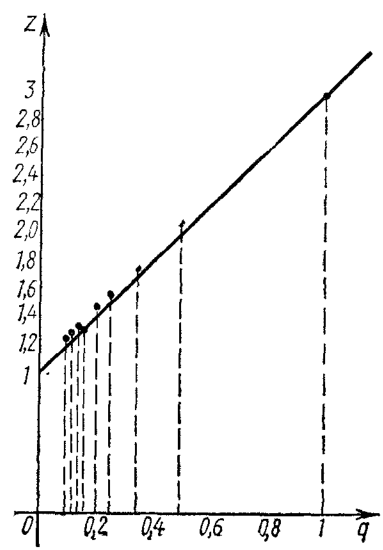


Рис. 6.5

хорошо соответствующая таблице, есть дробно-рациональная функция вида $y = \frac{x}{ax+b}$.

Рассмотрим функцию $\frac{1}{y} = a + \frac{b}{x}$, обратную данной, и введем новые переменные $z = \frac{1}{y}$, $q = \frac{1}{x}$. Тогда в плоскости qOz получим линейную зависимость $z = a + bq$.

Для того чтобы найти коэффициенты q и z, составим таблицу:

q	1	0,5	0,333	0,25	0,2	0,166	0,143	0,125	0,111
z	3	2	1,66	1,54	1,41	1,32	1,3	1,24	1,22

Построим в плоскости qOz точки, соответствующие табличным значениям (рис. 6.5). Мы видим, что эти точки лежат на одной прямой. Следовательно, наши предположения оказались правильными. Остается определить параметры a и b: $a = 1$; $b = \frac{3-1}{1-0} = 2$. Таким образом, эмпирическая формула имеет вид $y = \frac{x}{x+2}$.

§ 6.5. Эмпирические формулы, содержащие три параметра

На практике нелинейную взаимосвязь двух переменных x и y, из которых одну, например x, считают независимой переменной, а другую переменную y — зависимой, часто аппроксимируют функцией вида

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

где a, b и c — параметры, подлежащие определению.

Если количество измерений $(x_i;\ y_i)$ равно трем, то численные значения параметров находятся по методу выбранных точек. Результаты каждого из трех измерений $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, $(x_3;\ y_3)$ подставим в выражение (1) и получим систему трех уравнений

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c, \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c. \end{cases} \tag{2}$$

Решая систему (2) относительно a, b и c, находим численные значения искомых параметров.

Однако вычисление параметров a, b и c по методу выбранных точек дает грубые результаты. Точность можно повысить, если: а) увеличить число наблюдений; б) воспользоваться дополнительно некоторым критерием оценки точности.

Согласно методу средних, совокупность наблюдений $(x_i;\ y_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, разбивается на три группы, в каждой из которых алгебраическая сумма уклонений равна нулю:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1} \varepsilon_i = y_i - (ax^2 + bx_i + c) = 0, \\
\sum\limits_{j=l+1}^{q} \varepsilon_j = y_j - (ax_j^2 + bx_j + c) = 0, \\
\sum\limits_{k=q+1}^{n} \varepsilon_k = y_k - (ax_k^2 + bx_k + c) = 0.
\end{cases} \tag{3}
$$

Решение системы (3) и дает более точные, чем по методу выбранных точек, численные значения параметров a, b и c.

Лучшие результаты дает метод наименьших квадратов, согласно которому параметры a, b, c вычисляются из критерия минимума суммы квадратов уклонений

$$
F = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2 = \min.
$$

В силу необходимого условия экстремума функции нескольких переменных получим следующую систему:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial a} = 2 \sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)](-x_i^2) = 0, \\
\dfrac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)](-x_i) = 0, \\
\dfrac{\partial F}{\partial c} = 2 \sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)](-1) = 0,
\end{cases} \tag{4}
$$

откуда после преобразований получим систему

$$
\begin{cases}
a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\
a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\
a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i,
\end{cases} \tag{5}
$$

решение которой позволяет найти параметры a, b, c.

Пример. Для функции, заданной таблично:

x	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
y	0,3010	0,3424	0,3802	0,4150	0,4472	0,4771

подобрать многочлен второй степени $y = ax^2 + bx + c$, найдя значения параметров методом наименьших квадратов.

Решение. Составим вспомогательную таблицу:

Таблица 6.9

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
2,0	0,3010	4,00	8,000	16,000	0,60200	1,204000
2,2	0,3424	4,84	10,648	23,4256	0,75328	1,657216
2,4	0,3802	5,76	13,824	33,1776	0,91248	2,189952
2,6	0,4150	6,76	17,576	45,6976	1,07900	2,805400
2,8	0,4472	7,84	21,952	61,4656	1,25216	3,506048
3,0	0,4771	9,00	27,000	81,0000	1,43130	4,293900
Σ 15,0	2,3629	38,20	99,000	260,7664	6,03022	15,656516

Из системы вида (5)

$$\begin{cases} 260{,}7664\,a + 99{,}000\,b + 38{,}20\,c = 15{,}656516, \\ 99{,}000\,a + 38{,}20\,b + 15\,c = 6{,}03022, \\ 38{,}20\,a + 15\,b + 6\,c = 2{,}3629 \end{cases}$$

найдем параметры $a = -0{,}035762$; $b = 0{,}354481$; $c = -0{,}26470$. Тогда искомый многочлен запишется так:

$$y = -0{,}035762x^2 + 0{,}354481x - 0{,}26470.$$

Упражнения

1. Рост производства химического волокна за период 1970—1973 г. представлен таблицей:

x (годы)	1970	1971	1972	1973
y (тыс. т)	623	676	746	829

Подобрать эмпирическую зависимость производства химического волокна в данном временно́м интервале и найти параметры методом наименьших квадратов.

Ответ: $y = 69x + 546$.

2. Численность рабочих целлюлозно-бумажной промышленности за период 1965—1969 г. составила:

x (годы)	1965	1966	1967	1968	1969
y (тыс. чел.)	212	235	245	252	255

Подобрать эмпирическую зависимость роста численности рабочих по годам.

Ответ: $y = a \ln x + b$.

3. Подобрать эмпирическую зависимость, отражающую рост внешнеторгового оборота СССР со странами СЭВ в 1950—1970 г., если известно, что товарооборот по годам составил:

x (годы)	1955	1960	1965	1970
y (млрд. руб.)	6	11,3	22,6	36

Ответ: $y = ab^x$.

4. Ввод в действие жилых домов с I и по VIII пятилетку составил:

x (пятилетки)	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
y (млрд. кв. м.)	56,9	67,3	81,6	200,9	240,5	474,1	490,6	518,5

Подобрать эмпирическую зависимость, отражающую ввод в действие жилых домов по годам.

Ответ: $y=\dfrac{x}{ax+b}$.

5. Функция задана таблично своими значениями:

x	1	2	3	4	5
y	2,9	8,9	19,1	33,2	50,8

Аппроксимировать эту функцию зависимостью $y = ax^2 + bx + c$ и найти параметры методом наименьших квадратов.

Ответ: $y = 1{,}936\, x^2 + 0{,}394\, x + 0{,}502$.

6. Рост парка ЭВМ (в млрд. дол.) в США представлен таблицей:

Годы	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
Парк ЭВМ	10,1	15,1	19,7	25,3	31,5	37,6	42,7

Построить эмпирическую зависимость роста парка ЭВМ по годам и подобрать параметры методом наименьших квадратов.

7. Темпы роста общего объема продукции пищевой промышленности за период 1965—1970 г. (в % к 1965 г.) представлены в таблице:

Годы	1966	1967	1968	1969	1970	1971
Объем продукции	104	113	119	122	130	137

Построить эмпирическую зависимость, подбирая параметры методом средних.

8. Рост валового общественного продукта по транспорту и связи (в ценах соответствующих лет в млрд. руб.) представлен в таблице:

Годы	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Общественный продукт	18	19	21	22	23	25

Подобрать эмпирическую зависимость, вычисляя параметры методом выбранных точек.

9. Рост капиталовложений в народное хозяйство СССР (в млрд. руб.) по годам представлен таблицей:

Годы	1966	1967	1968	1969	1970	1971
Капиталовложения	61,0	66,0	71,2	79,6	82,0	87,7

Представить эту зависимость многочленом второй степени и подобрать коэффициенты по методу наименьших квадратов.

10. Рост алюминиевой промышленности в Италии по годам представлен таблицей:

Годы	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Производство. .	124,1	127,8	127,7	142,3	143,6	146,8

Подобрать двухпараметрическую эмпирическую зависимость.

11. Фонды экономического стимулирования промышленных предприятий (в млн. руб.) представлены таблицей:

Годы	1967	1968	1969	1970
Фонды экономического стимулирования.	3388	5965	8801	10313

Подобрать двухпараметрическую эмпирическую зависимость.

12. Размеры прямого налогообложения частных компаний США представлены таблицей:

Годы	1960	1962	1964	1966	1968	1970
Размеры налогообложения	23,0	24,2	27,6	30,0	28,7	37,0

Построить эмпирическую зависимость и подобрать параметры методом средних.

13. Показатели пассажирооборота воздушного транспорта Министерства гражданской авиации (в млрд. чел.) представлены таблицей:

Годы	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Показатели пассажирооборота	38,1	45,1	53,5	62,1	71,5	78,2

14. Протяженность путей (в км) Московского метрополитена за годы восьмой пятилетки соответственно составляла:

Годы	1966	1967	1968	1969	1970
Протяженность путей	335	350	350	383	400

Подобрать двухпараметрическую эмпирическую зависимость и получить численное значение параметров методом выбранных точек.

15. Рост занятости женщин в народном хозяйстве по годам (в млн. чел.) приведен в таблице:

Годы	1940	1950	1960	1970
Число женщин	13,2	19,2	29,3	45,8

Представить рост занятости женщин в народном хозяйстве трехпараметрической нелинейной зависимостью $y = ax^2 + bx + c$ и вычислить параметры методом выбранных точек.

16. Рост числа специалистов, приходящихся на 1000 рабочих в промышленности СССР, представлен таблицей:

Годы	1950	1960	1965	1970
Число специалистов . . .	101	106	126	142

Представить данную функцию трехпараметрической зависимостью и подобрать коэффициенты методом выбранных точек.

Глава VII
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 7.1. Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы

Из курса математического анализа известно, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b существует и имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

Для большинства элементарных функций первообразную $F(x)$ не удается выразить через элементарные функции. Кроме того, при практических расчетах подынтегральная функция задается в виде таблиц. Все это приводит к необходимости замены интегрирования численными методами.

Задача численного интегрирования состоит в следующем: найти определенный интеграл на отрезке $[a, b]$, если подынтегральная функция на отрезке $[a, b]$ задана таблично.

Формулы приближенного интегрирования называются *квадратурными формулами*. Рассмотрим простейшие из них.

Метод прямоугольников. Наиболее простым методом приближенного вычисления интеграла является метод прямоугольников, основанный на непосредственном определении интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ есть интегральная сумма, соответствующая некоторому разбиению отрезка $[a, b]$ и некоторому выбору точек $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ на отрезках разбиения.

Вычисление определенного интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ геометрически сводится к вычислению площади криволинейной трапеции, ограниченной функцией $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 7.1). Вычислим приближенное значение интеграла следующим образом. Заменим криволинейную трапецию $DEba$ прямоугольником $ABba$, проведя AB так, чтобы фигуры DAC и CEB получились примерно равной площади. Тогда площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, и полученного прямоугольника $ABba$ будут примерно равны.

Учитывая, что высота прямоугольника $ABba$ есть значение функции в точке ξ, запишем следующее приближенное равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f(\xi).$$

Для увеличения точности численного интегрирования можно отрезок $[a, b]$ разбить на несколько частей и для каждой из них вычислить приближенное значение площади криволинейной трапеции, ос-

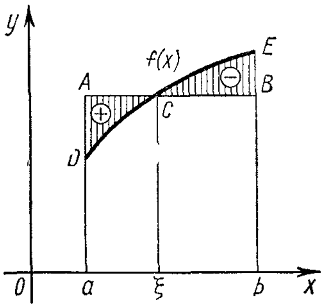


Рис. 7.1

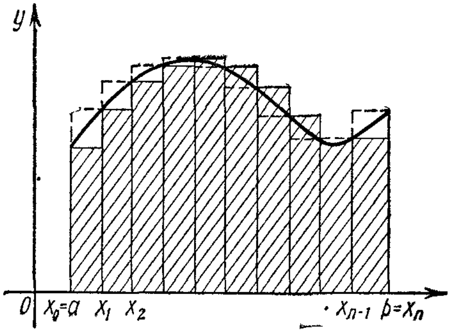


Рис. 7.2

нованием которой является отрезок $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$), а высотой — число $f(\xi_i)$, т. е. значение функции в точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, выбранное из условия минимума ошибки интегрирования. Тогда за приближенное значение интеграла на отрезке $[a, b]$ принимают интегральную сумму:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1}.$$

Практически удобно делить отрезок $[a, b]$ на равные части, а точки ξ_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) совмещать с левыми $[f(\xi_i) = f(x_i)]$ или правыми $[f(\xi_i) = f(x_{i+1})]$ концами отрезков разбиения.

Если точку ξ_i совместить с левым концом отрезка Δx_i, то приближенное значение интеграла геометрически равно площади заштрихованной ступенчатой фигуры (рис. 7.2), и может быть представлено *формулой левых прямоугольников*:

$$I_л = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i, \qquad (1$$

где $h = (b-a)/n$ — шаг.

Если же в качестве точки ξ_i выбрать правый конец отрезка Δx_i, то приближенное значение интеграла графически равно площади ступенчатой фигуры, ограниченной сверху пунктирной линией, и вычисляется по *формуле правых прямоугольников*:

$$I_{п}=\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)=h\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{2}$$

Пример С помощью формул левых и правых прямоугольников вычислить $\int_1^9 \frac{dx}{x+2}$, полагая $n=4$.

Решение. Зная пределы интегрирования $a=1$ и $b=9$, находим шаг $h=(b-a)/n=2$; тогда точками разбиения служат $x_0=1$, $x_1=3$, $x_2=5$, $x_3=7$, $x_4=9$, а значения подынтегральной функции $f(x)=\frac{1}{x+2}$ в этих точках таковы:

$$y_0=f(x_0)=\frac{1}{3};\quad y_1=f(x_1)=\frac{1}{5};\quad y_2=f(x_2)=\frac{1}{7};$$

$$y_3=f(x_3)=\frac{1}{9};\quad y_4=f(x_4)=\frac{1}{11}.$$

Далее найдем численное значение интеграла, пользуясь формулой левых прямоугольников:

$$I_{л}=h(y_0+y_1+y_2+y_3)=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)\approx 1{,}6024.$$

Если же вычисление определенного интеграла производить по формуле правых прямоугольников, то

$$I_{п}=h(y_1+y_2+y_3+y_4)=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)\approx 1{,}1053,$$

Метод трапеций. Приближенное значение определенного интеграла можно вычислить и иным способом. Заменим на отрезке $[a, b]$ дугу AB графика подынтегральной функции $y=f(x)$ стягивающей ее хордой (рис. 7.3) и вычислим площадь трапеции $ABba$. Примем значение определенного интеграла численно равным площади этой трапеции:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3}$$

Это и есть *формула трапеций* для приближенного вычисления интеграла.

Погрешность вычисления

$$R=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{h}{2}(y_0+y_1)$$

для формулы трапеций оценивается так:

$$R=-\frac{h}{12}y''(\xi), \tag{4}$$

где точка $\xi \in (x_0, x_0 + h)$. В случае, если $y''(\xi) > 0$, вычисление по формуле (3) дает значение интеграла **с избытком**; если $y''(\xi) < 0$, то интеграл вычисляется **с недостатком**.

Точность вычислений возрастает, если отрезок $[a, b]$ разделить на несколько частей и применить формулу трапеций к каждому отрезку Δx_i (рис. 7.4). Тогда

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\,\Delta x_i.$$

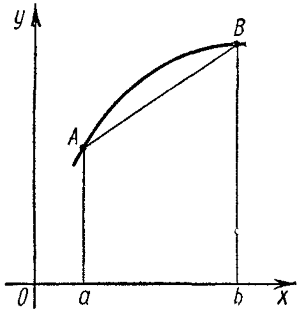


Рис. 7.3

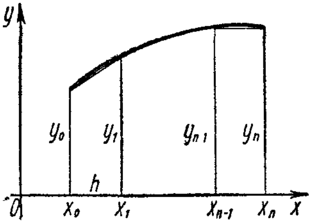


Рис. 7.4

Для простоты вычислений удобно делить отрезок $[a, b]$ на равные части, в этом случае длина каждого из отрезков разбиения есть $\Delta x_i = (b - a)/n$. Численное значение интеграла на отрезке Δx_i равно

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2},$$

а на всем отрезке $[a, b]$ соответственно

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i+y_{i+1}}{2}.$$

Так как под знаком суммы величины y_i встречаются дважды (от $i = 1$ до $i = n - 1$), то последнее равенство запишется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}\,y_n\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_0+y_n}{2}\right]. \qquad (5)$$

Эта формула называется *общей формулой трапеций*. Общую формулу трапеций можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n), \tag{6}$$

где шаг

$$h=\frac{b-a}{n}. \tag{10}$$

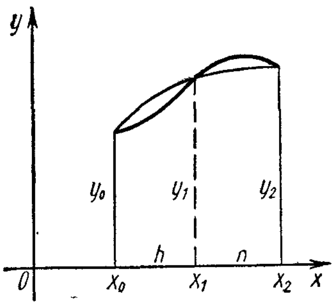


Рис. 7.5

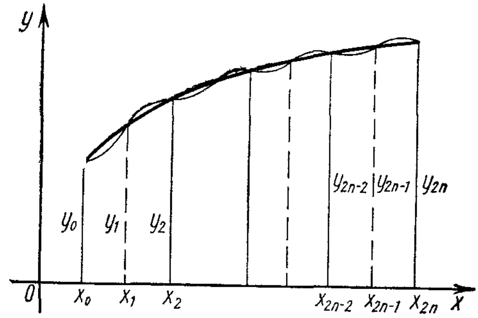


Рис. 7.6

Пример 1. Пользуясь общей формулой трапеций, вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ при $n = 4$.

Решение. Здесь $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; по формуле (7) находим $h = 0{,}25$ Следовательно, $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 0{,}75$; $x_4 = 1$. Тогда по формуле (6) получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{0{,}25}{2}\left(1+\frac{2}{1+0{,}25^2}+\frac{2}{1+0{,}5^2}+\frac{2}{1+0{,}75^2}+\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}764.$$

Метод парабол (метод Симпсона). Точность приближенного интегрирования заметно возрастет, если подынтегральную функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ заменить квадратичной функцией (рис. 7.5), принимающей в узлах $x_0 = a$, x_1, $x_2 = b$ значения $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$.

В качестве интерполяционного многочлена воспользуемся многочленом Ньютона

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1).$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx = 2hy_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\cdot\frac{4h^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\cdot\frac{8h^3}{3} -$$

$$-\frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\cdot h\frac{4h^2}{2} = 2hy_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 y_0 = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2). \tag{8}$$

Соотношение (8) называется *формулой Симпсона*. Формула Симпсона обладает повышенной точностью и является точной не только для многочленов второй степени, но и третьей.

Погрешность формулы Симпсона

$$R=\int\limits_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx-\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

оценивается следующим образом:

$$R=-\frac{h^5}{90}y^{\mathrm{IV}}(\xi), \tag{9}$$

где точка $\xi\in[x_0,\ x_0+2h]$.

Для увеличения точности вычислений отрезок $[a,\ b]$ разбивают на n пар участков $[x_{2n-2},\ x_{2n-1},\ x_{2n}]$ (рис. 7.6) и заменяя подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Ньютона второй степени, получают приближенное значение интеграла на каждом участке длины $2h$:

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2),$$

$$\int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4),$$

. . . .

$$\int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}).$$

Тогда численное значение определенного интеграла на отрезке $[a,\ b]$ будет равно сумме интегралов, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}[(y_0+y_{2n})+4(y_1+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+\ldots+y_{2n-2})]. \tag{10}$$

Соотношение (10) называется *общей формулой Симпсона*. Ее можно записать также в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})+4(y_1+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+\ldots+y_{2n-2})], \tag{11}$$

где

$$h=\frac{b-a}{2n}. \tag{12}$$

Пример 2. Вычислить по формуле Симпсона $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ при $h=0,25$.

Решение. По формуле (10) имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{h}{3}\,[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4].$$

Подставляя в подынтегральную функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ значения $x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 0,75$, $x_4 = 1$, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{0,25}{3}\left[1+\frac{4}{1+0,25^2}+\frac{2}{1+0,5^2}+\frac{4}{1+0,75^2}+\frac{1}{2}\right] \approx 0,702.$$

§ 7.2. Обобщенная формула численного интегрирования Ньютона—Котеса

Пусть некоторая функция $f(x)$ задана в узлах интерполяции $x_i = x_0+ih$ ($i=1, 2, \ldots, n$) на отрезке $[a, b]$ таблицей своих значений:

$x_0=a$	x_1	x_2	...	$x_n=b$
$y_0=f(x_0)$	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	...	$y_n=f(x_n)$

Требуется найти значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

По заданным значениям подынтегральной функции построим интерполяционный многочлен Лагранжа [см. формулу (5) § 4.4]

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})\ldots(x_i-x_n)}\,y_i. \qquad (1)$$

Для равноотстоящих узлов интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\cdot\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i}\,y_i, \qquad (2)$$

где $q=(x-x_0)/h$ — шаг интерполяции [(см. формулу (11) § 4.4]. Далее заменим подынтегральную функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом Лагранжа, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_0}^{x_n}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\cdot\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i}\,y_i\right]dx. \qquad (3)$$

Поменяем местами знак суммирования и интеграл и вынесем за знак интеграла постоянные коэффициенты:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \int_{x_0}^{x_n} \frac{q\,(q-1)\ldots(q-n)}{q-i}\,dx.$$

Так как $dq = \frac{dx}{h}$, то заменив пределы интегрирования, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot h \int_0^n q\,(q-1)\ldots$$
$$\ldots(q-i+1)\,(q-i-1)\ldots(q-n)\,dq. \qquad (4)$$

Для равноотстоящих узлов интерполяции на отрезке $[a, b]$ величина шага определяется как $h = (b-a)/n$. Подставив это выражение для h в формулу (4) и вынося $b-a$ за знак суммы, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{1}{n} \int_0^n q\,(q-1)\ldots$$
$$\ldots(q-i+1)\,(q-i-1)\ldots(q-n)\,dq. \qquad (5)$$

Положим

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{1}{n} \int_0^n q\,(q-1)\ldots(q-i+1)\,(q-i-1)\ldots(q-n)\,dq, \qquad (6)$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; числа H_i называются *коэффициентами Ньютона — Котеса*. Эти коэффициенты не зависят от вида $f(x)$, а являются функцией только n (количества узлов интерполяции). Поэтому коэффициенты Ньютона — Котеса можно вычислить заранее для различного числа узлов интерполяции и свести в справочную таблицу (см. табл. 7.1).

Таблица 7.1

$n=1$	$H_0 = H_1 = 1/2$
$n=2$	$H_0 = H_2 = 1/6,\ H_1 = 2/3$
$n=3$	$H_0 = H_3 = 1/8,\ H_1 = H_2 = 3/8$
$n=4$	$H_0 = H_4 = 7/90,\ H_1 = H_3 = 16/45,\ H_2 = 2/15$
$n=5$	$H_0 = H_5 = 19/288,\ H_1 = H_4 = 25/96,\ H_2 = H_3 = 25/144$
$n=6$	$H_0 = H_6 = 41/840,\ H_1 = H_5 = 9/35,\ H_2 = H_4 = 9/280,\ H_3 = 34/105$
$n=7$	$H_0 = H_7 = 751/17280,\ H_1 = H_6 = 3577/17280,\ H_2 = H_5 = 1323/17280,\ H_3 = H_4 = 2989/17280$

Окончательно формула (5) примет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} y_i H_i. \tag{7}$$

Пример. Вычислить по формуле Ньютона—Котеса $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,dx$, выбрав $n=4$.

Решение. Формула Ньютона — Котеса для $n = 4$ имеет вид

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{4} H_i y_i. \tag{*}$$

Определим шаг $h = (b - a)/4 \approx 0{,}4$. Далее, найдем значения подынтегральной функции $y = \frac{\cos x}{1+x}$ в точках x_0, x_1, x_3, x_4:

$$x_0=0;\quad y_0=\frac{\cos 0}{1+0}=1,\quad x_1=0{,}4;\quad y_1=\frac{\cos 22{,}5^\circ}{1+0{,}4}=0{,}659,$$

$$x_2=0{,}8;\quad y_2=\frac{\cos 45^\circ}{1+0{,}8}=0{,}393,\quad x_3=1{,}2;\quad y_3=\frac{\cos 67{,}5^\circ}{1+1{,}2}=0{,}174,$$

$$x_4=1{,}6;\ y_4=\frac{\cos 90^\circ}{1+1{,}6}=0.$$

Пользуясь табл. 7.1, находим коэффициенты Ньютона — Котеса:

$$H_0 = H_4 = 7/90;\quad H_1 = H_3 = 16/45;\quad H_2 = 2/15.$$

Подставив найденные значения в формулу, (*) получим

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{7}{90}(1+0)+\frac{16}{45}(0{,}659+0{,}174)+\frac{2}{15}\cdot 0{,}393\right]=0{,}670.$$

Рассмотрим частные случаи формулы Ньютона—Котеса. Если в формуле (7) положить $n = 1$, то получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)(y_0 H_0 + y_1 H_1),$$

где

$$H_0 = -\int_0^1 (q-1)\,dq = \frac{1}{2};\quad H_1 = \int_0^1 q\,dq = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2}(y_0+y_1),$$

но поскольку $b - a = h$ (ведь $n = 1$), окончательно имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1). \tag{8}$$

Тем самым в качестве частного случая формулы Ньютона — Котеса мы получили формулу трапеций.

Положим теперь в формуле (7) $n = 2$ и найдем коэффициенты Ньютона — Котеса [см. соотношение (6)]:

$$H_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 (q-1)(q-2)\,dq = \frac{1}{6},$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\int_0^2 q(q-2)\,dq = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-1)\,dq = \frac{1}{6}.$$

Так как $b - a = 2h$, то отсюда следует, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{9}$$

Таким образом, мы получили формулу Симпсона как частный случай формулы Ньютона — Котеса.

Если же в выражении (7) положить $n = 3$, то получаем следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) \tag{10}$$

Эта формула называется *правилом трех восьмых*. Ее погрешность оценивается соотношением

$$R = -\frac{3h^5}{80}\,y^{\mathrm{IV}}(\xi), \tag{11}$$

где точка $\xi \in [a, b]$.

§ 7.3. Квадратурная формула Чебышева

В § 7.2 была рассмотрена формула Ньютона — Котеса, согласно которой численное значение интеграла определяется по значениям функции $y_i = f(x_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) в фиксированных узлах интерполяции $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При этом коэффициенты Ньютона — Котеса H_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) составляются таким образом, что они не зависят от значений функции в узлах интерполяции, а являются функцией только q и n.

П. Л. Чебышев предложил для вычисления определенных интегралов воспользоваться формулой

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i), \tag{1}$$

в которой квадратурные коэффициенты c_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) фиксированы, а абсциссы x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) подлежат определению.

Для упрощения вычислений целесообразно выбрать $c_1 = c_2 = \ldots$ $\ldots = c_n$. Рассмотрим сначала частный случай, когда пределы интегрирования равны -1 и 1. Тогда формула (1) примет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2c_n\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)], \tag{2}$$

где квадратурный коэффициент c_n и абсциссы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подлежат определению.

Коэффициент c_n и узлы интерполяции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определим из условия, что это равенство является точным для случая, когда (x) — многочлен вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n. \tag{3}$$

Подставив многочлен (3) в левую часть равенства (2) и проинтегрировав, получим

$$\int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n)\,dx = 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \ldots\right).$$

В правую часть равенства (2) подставим значение многочлена (3) в узлах $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots + a_n x_1^n,\\
f(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \ldots + a_n x_2^n,\\
f(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \ldots + a_n x_3^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + \ldots + a_{n-1} x_n^n.
\end{aligned}$$

Тогда равенство (2) примет вид

$$\begin{aligned}
2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \ldots\right) &= 2c_n\,[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) +\\
&+ a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + a_3(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3) + \ldots\\
&\ldots + a_n(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n)].
\end{aligned} \tag{4}$$

Полученное равенство должно выполняться при любых значениях $a_0, a_1, \ldots, a_n$, поэтому из сравнения коэффициентов a_i в правой и левой частях соотношения (4) находим, что $nc_n = 1$, откуда

$$c_n = \frac{1}{n}, \tag{5}$$

и, кроме того,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = \dfrac{n}{3}, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_n^3 = 0, \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \ldots + x_n^4 = \dfrac{n}{5}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + x_3^n + \ldots + x_n^n = \dfrac{n\,[1-(-1)^{n+1}]}{2\,(n+1)}. \end{cases} \tag{6}$$

Подставляя найденное для c_n выражение в соотношение (2), получим *формулу Чебышева*:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{2}{n}\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)], \tag{7}$$

где точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяются из системы уравнений (6).

Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для различных n вычисляются заранее и сводятся в таблицу (см. табл. 7.2).

Таблица 7.2

Число ординат	Значения абсцисс		
$n=2$	$-x_1 = x_2 = 0,577350$		
$n=3$	$-x_1 = x_3 = 0,707107$;	$x_2 = 0$	
$n=4$	$-x_1 = x_4 = 0,794654$;	$-x_2 = x_3 = 0,187592$	
$n=5$	$-x_1 = x_5 = 0,832498$;	$-x_2 = x_4 = 0,374541$;	$x_3 = 0$
$n=6$	$-x_1 = x_6 = 0,866247$;	$-x_2 = x_5 = 0,422519$;	$-x_3 = x_4 = 0,266635$
$n=7$	$-x_1 = x_7 = 0,883862$;	$-x_2 = x_6 = 0,529657$;	
	$-x_3 = x_5 = 0,323912$;	$x_4 = 0$	

В том случае, когда пределы заданного интеграла отличны от -1 и 1, формула Чебышева принимает следующий вид:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\,[f(z_1) + f(z_2) + \ldots + f(z_n)], \tag{8}$$

где

$$z_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

а x_i имеют указанные в таблице значения.

Пример. С помощью формулы Чебышева вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$, полагая $n=5$.

Решение. Здесь отрезок интегрирования есть $[0, \pi/2]$. По формуле (8) получаем

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{5}(\sin z_1+\sin z_2+\sin z_3+\sin z_4+\sin z_5),$$

где

$$z_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)x_i=\frac{\pi}{4}(1+x_i).$$

Пользуясь табл. 7.2, находим:

$$\begin{aligned}
&z_1=45^\circ(1-0,832498)=7^\circ\,32,26'; && \sin z_1=0,13117;\\
&z_2=45^\circ(1-0,374541)=28^\circ\,8,74'; && \sin z_2=0,47171;\\
&z_3=45^\circ(1+0)=45^\circ\,00'; && \sin z_3=0,70711;\\
&z_4=45^\circ(1+0,374541)=61^\circ\,51,26'; && \sin z_4=0,88176;\\
&z_5=45^\circ(1+0,832498)=82^\circ\,27,74'; && \sin z_5=0,99136.
\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в формулу Чебышева, окончательно получим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx=\frac{\pi}{10}\cdot 3,18311=1,000004.$$

Так как точное значение интеграла равно 1, то погрешность приближенного значения составляет 0,0004%.

§ 7.4. Квадратурная формула Гаусса

Для получения повышенной точности при численном интегрировании пользуются *формулой Гаусса*

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)+\ldots+c_n f(x_n), \tag{1}$$

в которой не фиксируются не только узлы интерполяции $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но и квадратурные коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$. При этом $2n$ неизвестных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$ определяются из условия, что формула является точной в случае любого многочлена степени $2n-1$.

Таким образом, для любого многочлена $(2n-1)$-й степени

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2n-1}x^{2n-1} \tag{2}$$

должно выполняться точное равенство

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n). \tag{3}$$

Многочлен $f(x)$, степень которого равна $2n-1$, можно представить в виде

$$f(x) = F(x)\,Q(x) + R(x), \tag{4}$$

где $F(x)$ — искомый многочлен n-й степени, а $Q(x)$ и $R(x)$ — соответственно частное от деления $f(x)$ на $F(x)$ и остаток от этого деления; степени многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ не превышают $n-1$. Выражение для $F(x)$ можно записать таким образом:

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n); \tag{5}$$

здесь величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — искомые абсциссы формулы Гаусса, а $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — постоянные.

Так как искомая функция $F(x)$ в узлах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращается в нуль, то

$$f(x_1) = R(x_1),\quad f(x_2) = R(x_2),\quad \ldots,\quad f(x_n) = R(x_n). \tag{6}$$

Тогда равенство (3) примет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} F(x)\,Q(x)\,dx + \int_{-1}^{1} R(x)\,dx = \tag{7}$$

$$= c_1 R(x_1) + c_2 R(x_2) + \ldots + c_n R(x_n).$$

Но для многочлена $R(x)$ степени не выше $n-1$ также должно иметь место точное равенство

$$\int_{-1}^{1} R(x)\,dx = c_1 R(x_1) + c_2 R(x_2) + \ldots + c_n R(x_n). \tag{8}$$

Вычитая (8) из (7), получим

$$\int_{-1}^{1} F(x)\,Q(x)\,dx = 0. \tag{9}$$

Из последнего соотношения можно определить искомую функцию $F(x)$. Так как равенство (9) справедливо для произвольного многочлена $Q(x)$ степени $n-1$, т. е. для многочлена вида

$$Q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}, \tag{10}$$

то оно выполняется при любых коэффициентах $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$; следовательно, имеет место следующая система уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \int\limits_{-1}^{1} x^{n-1} F(x)\,dx = 0, \\ \int\limits_{-1}^{1} x^{n-2} F(x)\,dx = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int\limits_{-1}^{1} xF(x)\,dx = 0, \\ \int\limits_{-1}^{1} F(x)\,dx = 0. \end{array}\right. \tag{11}$$

Подставляя сюда выражение для $F(x)$ из формулы (5) и интегрируя, получим для определения коэффициентов A_1, $A_2, \ldots, A_n$ систему n уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{A_1}{2n-1} + \frac{A_3}{2n-3} + \frac{A_5}{2n-5} + \ldots = 0, \\ \frac{1}{2n-1} + \frac{A_2}{2n-3} + \frac{A_4}{2n-5} + \ldots = 0, \\ \frac{A_1}{2n-3} + \frac{A_3}{2n-5} + \frac{A_5}{2n-7} + \ldots = 0, \\ \frac{1}{2n-3} + \frac{A_2}{2n-5} + \frac{A_6}{2n-7} + \ldots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{12}$$

Из этих уравнений видно, что $A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = \ldots = 0$ и, следовательно, искомый многочлен имеет вид

$$F(x) = x^n + A_2 x^{n-2} + A_4 x^{n-4} + A_6 x^{n-6} + \ldots. \tag{13}$$

Отметим, что при четном n корни уравнения $F(x) = 0$ попарно равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, а при нечетном n корнем служит также и $x = 0$.

Определив из системы (12) коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), составим уравнение $F(x) = 0$ и найдем его корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. искомые абсциссы формулы Гаусса, а затем вычислим коэффициенты c_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) по формуле

$$c_i = \frac{\int\limits_{-1}^{1} (x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)\,dx}{(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}. \tag{14}$$

Пример. Построить квадратурную формулу Гаусса для случая $n=2$ на отрезке интегрирования $[-1, 1]$.

Решение. Общий вид квадратурной формулы Гаусса при $n=2$ и заданных пределах интегрирования

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2),$$

где подлежат определению квадратурные коэффициенты c_1 и c_2, а также абсциссы x_1 и x_2.

Для определения абсцисс составим многочлен $F(x) = x^2 + A_1 x + A_2$, коэффициенты A_1 и A_2 которого найдем из системы вида (11):

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} xF(x)\,dx = 0, \\ \int_{-1}^{1} F(x)\,dx = 0 \end{cases}$$

непосредственной подстановкой многочлена $F(x)$ в систему. Имеем

$$\begin{cases} \frac{A_1}{3} = 0, \\ \frac{1}{3} + A_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. $A_1 = 0$, $A_2 = -1/3$. Тогда

$$F(x) = x^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

откуда

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0{,}57735, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}57735.$$

Коэффициенты c_1 и c_2 вычислим по формуле (14):

$$c_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\,dx = 1, \quad c_2 = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,dx = 1.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(-0{,}57735) + f(0{,}57735).$$

Однако можно подобрать многочлен $F(x)$, удовлетворяющий соотношениям (11), без предварительного определения коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Якоби предложил в качестве многочлена $F(x)$ воспользоваться *многочленом Лежандра*

$$F(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \cdot \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \tag{15}$$

для которого справедливы равенства (11), т. е.

$$\int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = 0. \tag{16}$$

Действительно, интегрируя по частям, находим

$$s_k = \int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\, dx =$$

$$= \left[x^k \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\right]_{-1}^{1} - k \int_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx. \tag{17}$$

Первый член правой части равенства (17) обращается в нуль. Отсюда

$$s_k = -k \int_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx. \tag{18}$$

Аналогично получим

$$\int_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx = -(k-1) \int_{-1}^{1} x^{k-2} \frac{d^{n-2} (x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\, dx,$$

. . . .

$$\int_{-1}^{1} x^{k-(k-1)} \frac{d^{n-(k-1)} (x^2-1)^n}{dx^{n-(k-1)}}\, dx = -1 \cdot \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k} (x^2-1)^n}{dx^{n-k}}\, dx = 0,$$

Итак, при $k < n$ имеем

$$s_k = (-1)^k\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k} (x^2-1)^n}{dx^{n-k}}\, dx = 0.$$

Таким образом, многочлен Лежандра удовлетворяет системе уравнений (11).

Можно показать, что всякий другой многочлен, удовлетворяющий этим условиям, отличается от вышеприведенного лишь постоянным множителем.

Для вычисления коэффициентов c_k используют упрощенную функцию частного вида. Положим

$$f(x) = 2F_k(x)\, F_k'(x), \tag{19}$$

где

$$F_k(x) = \frac{F(x)}{x-x_k} = k(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n) \tag{20}$$

(здесь величина k — постоянная). Тогда

$$\int_{-1}^{1} 2F_k(x)\,F'_k(x)\,dx = [F_k(x)]^2\Big|_{-1}^{1} = \frac{[F(1)]^2}{(1-x_k)^2} - \frac{[F(-1)]^2}{(1+x_k)^2} =$$

$$= \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}\,F^2(1) = \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}\,, \tag{21}$$

так как $[F(-1)]^2 = [F(1)]^2 = 1$. Согласно формуле (3)

$$\int_{-1}^{1} 2F_k(x)\,F'_k(x)\,dx = 2c_k\,F(x_k)\,F'(x_k), \tag{22}$$

поскольку все остальные члены в формуле (3) обращаются в нуль.

Дифференцируя равенство

$$(x - x_k)\,F_k(x) = F(x)$$

дважды по x и полагая $x = x_k$, получим

$$F_k(x_k) = F'(x_k),\quad 2F'_k(x_k) = F''(x_k). \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22) и сравнивая с (21), находим

$$= \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}\cdot\frac{1}{F'(x_k)\,F''(x_k)}\,. \tag{24}$$

Так как $F(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x^2 - 1)\,F''(x) + 2xF'(x) - n(n+1)F(x) = 0, \tag{25}$$

то полагая в нем $x = x_k$ и замечая, что $F(x_k) = 0$, имеем

$$(x_k^2 - 1)\,F''(x_k) + 2x_k\,F'(x_k) = 0,$$

откуда

$$F''(x_k) = \frac{2x_k\,F'(x_k)}{1-x_k^2}\,. \tag{26}$$

Подставляя это выражение в соотношение для коэффициентов c_k, окончательно получаем

$$c_k = \frac{2}{(1-x_k^2)\,[F'(x_k)]^2}\quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{27}$$

Для вычисления интеграла общего вида $\int_a^b f(x)\,dx$ следует произвести замену переменной

$$z_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,x_i\quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{28}$$

Тогда формула Гаусса примет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,[c_1 f(z_1) + c_2 f(z_2) + \ldots + c_n f(z_n)]. \tag{29}$$

Значения квадратурных коэффициентов Гаусса c_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) и абсцисс x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

$n=1$	$x_1=0,5$	$c_1=2$
$n=2$	$-x_1=x_2=0,577350$	$c_1=c_2=1$
$n=3$	$-x_1=x_3=0,774597$ $x_2=0$	$c_1=c_3=0,555555$ $c_2=0,888889$
$n=4$	$-x_1=x_4=0,861136$ $-x_2=x_3=0,339981$	$c_1=c_4=0,347855$ $c_2=c_3=0,652145$
$n=5$	$-x_1=x_5=0,906180$ $-x_2=x_4=0,538470$ $x_3=0$	$c_1=c_5=0,236927$ $c_2=c_4=0,478629$ $c_3=0,568889$
$n=6$	$-x_1=x_6=0,932470$ $-x_2=x_5=0,661210$ $-x_3=x_4=0,238620$	$c_1=c_6=0,171324$ $c_2=c_5=0,360761$ $c_3=c_4=0,467914$
$n=7$	$-x_1=x_7=0,949108$ $-x_2=x_6=0,741531$ $-x_3=x_5=0,405845$ $x_4=0$	$c_1=c_7=0,129485$ $c_2=c_6=0,279705$ $c_3=c_5=0,381830$ $c_4=0,417960$
$n=8$	$-x_1=x_8=0,960290$ $-x_2=x_7=0,796666$ $-x_3=x_6=0,525532$ $-x_4=x_5=0,183434$	$c_1=c_8=0,101228$ $c_2=c_7=0,222381$ $c_3=c_6=0,313707$ $c_4=c_5=0,362684$

Пример. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^1 \sqrt{x+1}\, dx$, применяя квадратурную формулу Гаусса с четырьмя ординатами.

Решение. Здесь $a = 0$, $b = 1$. Согласно формуле (29), имеем

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x+1}\, dx = \frac{b-a}{2}\,[c_1 f(z_1) + c_2 f(z_2) + c_3 f(z_3) + c_4 f(z_4)].$$

Найдем абсциссы z_1, z_2, z_3 и z_4, пользуясь формулой замены переменной (28) и табл. 7.3:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, x_1 = 0,5 - 0,430568 = 0,069432;$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, x_2 = 0,5 - 0,169991 = 0,330009;$$

$$z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, x_3 = 0,5 + 0,169991 = 0,669991;$$

$$z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, x_4 = 0,5 + 0,430568 = 0,930568.$$

Так как квадратурные коэффициенты попарно равны: $c_1 = c_4 = 0{,}347855$; $c_2 = c_3 = 0{,}652145$, то формула Гаусса для рассматриваемого случая принимает вид

$$\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx = \frac{1}{2}\{c_1[f(z_1)+f(z_4)]+c_2[f(z_2)+f(z_3)]\}.$$

Тогда окончательно получаем

$$\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx = \frac{1}{2}\{0{,}347855\,[\sqrt{1{,}069432}+\sqrt{1{,}930568}\,]+$$
$$+0{,}652145\,[\sqrt{1{,}330009}+\sqrt{1{,}669991}\,]\}=1{,}218951.$$

§ 7.5. Графическое интегрирование

Пусть функция $f(x)$ задана таблично. Требуется определить интеграл как функцию верхнего предела:

$$I(x) = \int_{x_1}^{x_0} f(x)\, dx.$$

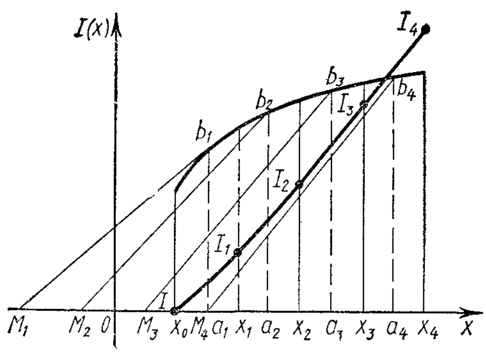


Рис. 7.7

По значениям $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ подынтегральной функции $f(x)$ в узлах $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ построим график (рис. 7.7). Найдем из графика значения $f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$, $f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)$, ..., $f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)$. От точки $a_1 = x_0 + \frac{h}{2}$ откладываем влево произвольный отрезок M_1a_1, которым воспользуемся в качестве эталона.

Соединим точку M_1 с точкой $b_1 = f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$ и из точки x_0 проведем прямую, параллельную M_1b_1, до пересечения с ординатой, проведенной из точки x_1 (отрезок x_1I_1). Ордината точки I_1 есть величина определенного интеграла:

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

Далее передвинем отрезок M_1a_1 по оси Ox вправо так, чтобы правый конец его совпал с точкой $a_2 = x_1 + \frac{h}{2}$, и получим новый отрезок M_2a_2. Соединив точку M_2 с точкой $b_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)$, из точки I_1 проведем прямую, параллельную M_2b_2, до пересечения с ординатой, проведенной из точки x_2. Тогда

$$I_2 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Далее, сдвигая эталонный отрезок M_1a_1 так, чтобы правый конец его совпал с точкой $a_3 = x_2 + \frac{h}{2}$, получим отрезок M_3a_3. Соединим точки M_3 и $b_3 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right)$ и проведем из точки I_2 прямую, параллельную M_3b_3, до пересечения с ординатой, проведенной из точки x_3; тогда

$$I_3 = \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx$$

и т. д.

Соединив точки $x_0 = I_0, I_1, I_2, I_3, \ldots$ плавной линией, получим интегральную кривую. Точность интеграла, найденного графически, определяется точностью формулы трапеций и точностью вычерчивания графика.

§ 7.6. Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона

При решении задач часто приходится вычислять производную, однако во многих практических задачах функции задаются таблично и методы дифференциального исчисления к исследованию таких функций применить нельзя. В этом случае прибегают к численному дифференцированию.

Задача численного дифференцирования ставится следующим образом. Пусть функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ задана таблично своими $n + 1$ значениями. Требуется найти аналитическое выражение производной.

В качестве аппроксимирующей функции выберем интерполяционный многочлен. Если узлы интерполяции в исходной задаче равноотстоящие, т. е. $x_{i+1} - x_i = h$ (где $i = 0, 1, \ldots, n$), то в этом случае для замены функции $f(x)$ можно воспользоваться интерполяционными формулами Ньютона.

Пусть

$$f(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots, \qquad (1)$$

где правая часть есть первая интерполяционная формула Ньютона, выраженная через число шагов; здесь $q=(x-x_0)/h$ и $h=x_{i+1}-x_i$ ($i=0, 1, 2, \dots$). Перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$f(x)\approx y_0+q\Delta y_0+\frac{q^2-q}{2}\Delta^2 y_0+\frac{q^3-3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_0+$$
$$+\frac{q^4-6q^3+11q^2-6q}{24}\Delta^4 y_0+\dots \qquad (1')$$

Заметим, что

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}\cdot\frac{df(x)}{dx}. \qquad (2)$$

Продифференцировав равенство (1′) и воспользовавшись зависимостью (2), получим

$$f'(x)\approx\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+\right.$$
$$\left.+\frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0+\dots\right]. \qquad (3)$$

Продифференцировав теперь функцию $y=f'(x)$, имеем

$$f''(x)\approx\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0+\dots\right], \qquad (4)$$

так как

$$f''(x)=\frac{d(f'(x))}{dx}=\frac{d(f'(x))}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}.$$

Таким же образом можно определить и следующие производные функции $f(x)$.

Формулы приближенного дифференцирования для определения производных в узлах интерполяции значительно упрощаются. Полагая $q=0$, получим

$$f'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\frac{\Delta^5 y_0}{5}\dots\right) \qquad (5)$$

и

$$f''(x)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+\dots\right). \qquad (6)$$

Погрешность в определении производной приближенно оценивается как

$$R_k'(x_0)\approx h^{k+1}\frac{q(q-1)\dots(q-k)}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi), \qquad (7)$$

где точка $\xi\in[a, b]$, но отлична от узлов интерполяции.

Чтобы получить значение производной в точке, лежащей в конце таблицы, следует воспользоваться второй интерполяционной формулой Ньютона:

$$f(x) \approx y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \\ + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots, \quad (8)$$

где $q = (x - x_n)/h$. Тогда приближенное значение для производной есть

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1} + \frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{3q^2+6q+2}{6}\Delta^3 y_{n-3} + \right. \\ \left. + \frac{2q^3+9q^2+11q+3}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots\right]. \quad (9)$$

Пример. Функция $y = f(x)$ задана таблично:

x_i	1	2	3	4
y_i	4	9	26	61

Методом численного дифференцирования найти первые две производные этой функции в точке $x = 1$.

Решение. Составим таблицу конечных разностей:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	4	5	12	6
2	9	17	18	
3	26	35		
4	61			

Шаг этой таблицы $h = 1$. Согласно формуле (5)

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0\right); \quad f'(1) = 1.$$

Вычислим вторую производную в узле интерполяции $x_0 = 1$. По формуле 6) находим

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0); \quad f''(1) = 6.$$

§ 7.7. Формула приближенного дифференцирования, основанная на интерполяционной формуле Лагранжа

Пусть $f(x)$ — функция, заданная на отрезке $[a, b]$ таблично своими значениями $y_i = f(x_i)$ (где $i = 0, 1, \ldots, n$) в равноотстоящих узлах интерполяции, т. е. $x_{i+1} - x_i = h$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Построив для данной системы узлов интерполяционный многочлен Лагранжа, получим

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i}\, y_i, \tag{1}$$

где $q = (x - x_0)/h$ — шаг интерполяции [см. формулу (11) § 4.4]. Так как $\frac{dx}{dq} = h$, то из соотношения (1) находим

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i\,(n-i)!} \cdot \frac{d}{dq}\left[\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i}\right]. \tag{2}$$

Погрешность, допускаемая при нахождении производной, есть

$$R_n'(x) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!\,(n-i)!}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi), \tag{3}$$

где ξ — точка отрезка $[a, b]$, отличная от узлов интерполяции.

Произведем расчет для $n = 2$ [функция $f(x)$ задана тремя табличными значениями]. Имеем

$$L_2(x) = \frac{1}{2} y_0 (q-1)(q-2) - y_1 q\,(q-2) + \frac{1}{2} y_2 q\,(q-1).$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{dx}{dq} = h$, находим

$$y'(x) \approx L_2'(x) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2} y_0(2q-3) - y_1(2q-2) + \frac{1}{2} y_2(2q-1)\right].$$

В частности, для производных в узлах интерполяции $y'(x_i) = y_i$ получим следующие выражения:

$$y_0' = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2), \text{ причем } r_0 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_0);$$

$$y_1' = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2), \text{ причем } r_1 = -\frac{1}{6} h^2 y'''(\xi_1);$$

$$y_2' = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2), \text{ причем } r_2 = \frac{1}{3} h^2 y'''(\xi_2).$$

В случае $n = 3$ [функция $f(x)$ задана четырьмя табличными значениями] аналогично получаем

$$y_0' = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} y^{IV}(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} y^{IV}(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} y^{IV}(\xi);$$

$$y_3' = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} y^{IV}(\xi).$$

Следует отметить, что формулы численного дифференцирования являются менее точными по сравнению с интерполяционными, однако они удобны для проведения практических расчетов.

§ 7.8. Графическое дифференцирование

Пусть функция $f(x)$ задана таблично:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \dots,\ y_n = f(x_n).$$

Нанесем эти точки на график (рис. 7.8) и соединим плавной линией. Построим для функции $f(x)$ зависимость $g(x) = f'(x)$.

Отложим произвольный отрезок MO и воспользуемся им в качестве эталона. Из точки M проведем прямую, параллельную касательной к кривой $f(x)$ в точке с абсциссой a; эта прямая пересечет ось ординат в точке a'. Из точки a' проведем горизонталь до пересечения с продолжением ординаты из точки a. Получим точку $a'' = g(a) = f'(a)$.

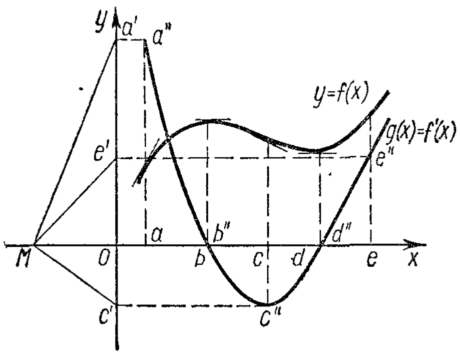


Рис. 7.8

В качестве следующей характерной точки выберем точку b. Прямая, проведенная из точки M и параллельная касательной к $f(x)$ в точке b, сольется с осью Ox. Точка b совпадает с точкой b''.

Определяем наклон касательной к $f(x)$ в точке с абсциссой c и проводим прямую параллельно этой касательной до пересечения в точке c' с осью Oy; получаем $c'' = g(c) = f'(c)$ и т. д.

Соединив точки a'', b'', c'', d'',..., получим приближенный график производной $g(x) = f'(x)$.

Упражнения

1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_2^8 \sqrt{x+2}\,dx$, пользуясь формулой левых прямоугольников при $n = 6$.

Ответ: 15,160.

2. Пользуясь формулой правых прямоугольников при $n = 8$, вычислить $\int\limits_1^9 \frac{dx}{x+1}$.

Ответ: 1,429.

3 Пользуясь формулой трапеций при $n = 8$, вычислить $\int\limits_0^8 \frac{dx}{x+1}$.

Ответ: 2,28.

4. По формуле трапеции вычислить $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ полагая $n = 5$.

Ответ: 2,002.

5. По формуле Симпсона вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+9}$, полагая $2n = 10$.

Ответ: 0,107250.

6. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\cos x}{1+x}\,dx$ с помощью формулы Симпсона; положить $2n=10$.

Ответ: 0,67363.

7. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x+3}$, пользуясь формулой Гаусса при $n = 5$.

Ответ: 0,6931472.

8. Вычислить тот же интеграл, пользуясь формулой Чебышева при $n = 6$.

Ответ: 0,6931465.

9. Функция задана таблично:

x	0,525	0,526	0,527	0,528
y	0,50121	0,50208	0,50294	0,50381

Методом численного дифференцирования найти первую производную в точке $x = 0,525$.

Ответ: 0,007.

10. Найти производную первого порядка в точке $x = 50$ для функции, заданной таблично:

x	50	55	60	65
y	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129

Ответ: 0,0087.

Глава VIII
РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 8.1. Понятие последовательности и ряда

Напомним некоторые сведения из курса математического анализа, необходимые для дальнейшего изложения, опуская доказательства приводимых в тексте утверждений.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$. В качестве области определения этой функции возьмем множество натуральных чисел, т. е. аргумент x принимает значения $1, 2, \dots, n$. Такая функция называется *последовательностью.*

Последовательность записывается в виде

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots \text{ или } \{a_n\},$$

причем a_n называют *общим членом* последовательности, a_{n-1} — членом, предшествующим a_n, а a_{n+1} — членом, следующим за a_n.

Приведем примеры последовательностей.

1) Последовательность 1, 2, 3,..., n,..., общий член которой $a_n = n$, называется *натуральным рядом чисел.*

2) Последовательность a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n,..., для которой $a_n - a_{n-1} = d$, где d постоянная величина, называется *арифметической прогрессией*. Для задания арифметической прогрессии достаточно знать ее первый член a_1 и разность прогрессии d. Действительно, общий член выражается формулой

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Так как по приведенной формуле можно найти любой член последовательности, подставив значения $n = 1, 2, 3, \ldots$, то последовательность считается заданной.

3) Последовательность b_1, b_2,..., b_{n-1}, b_n,..., для которой $b_n = b_{n-1}q$, где q — постоянная величина, называется *геометрической прогрессией*. Для задания геометрической прогрессии достаточно знать ее первый член b_1 и знаменатель q. Общий член выражается формулой

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

4) Последовательность c_1, c_2, ..., c_n,..., для которой $c_n = c$, где c — постоянная величина, называется *постоянной последовательностью.*

5) Рассмотрим еще один пример последовательности. Будем вычислять число e последовательно с одним, двумя, тремя и т. д. знаками. Результаты вычислений можно представить в следующем виде:

$$\begin{array}{ccccc} 2; & 2{,}7; & 2{,}71; & 2{,}718; & \ldots; \\ (1); & (2); & (3); & (4); & \ldots; \end{array}$$

Занумеровав полученные значения числами натурального ряда, как это показано в скобках, получим последовательность.

Кроме числовых последовательностей мы будем рассматривать и *функциональные последовательности.*

Приведем примеры функциональных последовательностей:

$$1)\quad a_0,\quad a_1x,\quad a_2x^2,\ldots,\ a_{n-1}x^{n-1},\ldots;$$

$$2)\quad \sin x,\quad \sin 2x;\quad \sin 3x,\ldots,\ \sin nx,\ldots.$$

Дадим определение предела числовой последовательности. Число A называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. В таком случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся.*

Пример 1. Показать, что геометрическая прогрессия b, bq, bq^2, ..., bq^{n-1}, ... при $|q| < 1$ представляет собой сходящуюся последовательность, а при $|q| \geqslant 1$ — расходящуюся.

Р е ш е н и е. 1) Сначала рассмотрим случай $|q| < 1$. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} bq^{n-1} = 0,$$

т. е. по заданному $\varepsilon > 0$ найдем N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $|bq^{n-1} - 0| < \varepsilon$. Для этого разрешим неравенство относительно n. Перепишем его в виде

$$|b||q|^{n-1} < \varepsilon, \text{ или } |q|^{n-1} < \frac{\varepsilon}{|b|}.$$

Прологарифмируем последнее неравенство:

$$(n-1)\ln|q| < \ln\frac{\varepsilon}{|b|}.$$

Разделив обе его части на отрицательное число $\ln|q|$, получим

$$n-1 > \frac{\ln\frac{\varepsilon}{|b|}}{\ln|q|}, \quad \text{т. е.} \quad n > 1 + \frac{\ln\frac{\varepsilon}{|b|}}{\ln|q|}.$$

Очевидно, в качестве N достаточно взять

$$N = E\left(1 + \frac{\ln\frac{\varepsilon}{|b|}}{\ln|q|}\right),$$

где $E(x)$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x.

2) Рассмотрим теперь случай $q > 1$, $b > 0$. Покажем, что последовательность является расходящейся. Для этого достаточно показать, что для любого как угодно большого M существует такое N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $bq^{n-1} > M$. Разрешая последнее неравенство относительно n, получим

$$n > 1 + \frac{\ln\frac{M}{b}}{\ln q}.$$

В качестве N берем

$$N = E\left(1 + \frac{\ln\frac{M}{b}}{\ln q}\right).$$

Заметим, что при $q = 1$ последовательность является постоянной и $\lim\limits_{n\to\infty} bq^{n-1} = b$.

Можно показать, что во всех остальных случаях последовательность расходится.

Пусть имеется последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *рядом*; здесь a_n есть n-й член ряда.

Сумма первых n членов ряда называется его *n-й частичной суммой*:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Суммой ряда называется предел последовательности его частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Если ряд имеет сумму, то его называют *сходящимся*, в противном случае говорят, что ряд *расходится*.

Приведем примеры сходящихся и расходящихся рядов.

Пример 2. Рассмотрим ряд, получающийся из арифметической прогрессии, и запишем его n-ю частичную сумму:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{d}{2} n^2 + \frac{2a_1 - d}{2} n.$$

Очевидно, при стремлении n к бесконечности эта частичная сумма неограниченно возрастает по абсолютной величине и, следовательно, данный ряд расходится.

Пример 3. Рассмотрим ряд, образованный геометрической прогрессией при $|q| < 1$, и найдем его сумму. Воспользуемся формулой суммы n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} q^n.$$

Ранее было доказано (см. пример 1), что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$); следовательно,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

Ряды, члены которых являются функциями, называются *функциональными рядами*. Таковы, например, ряды

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + \dots,$$

$$b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots + b_{n-1} \cos(n-1)x + \dots.$$

Первый из них называют *степенным* рядом, а второй — *тригонометрическим*.

Рассмотрим функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

где $u_n(x)$ — функции, определенные на замкнутом интервале $[a, b]$. Пусть $x_0 \in [a, b]$, тогда ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

является числовым рядом и может оказаться сходящимся или расходящимся.

Совокупность всех значений $x \in [a, b]$, для которых сходится соответствующий числовой ряд, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Очевидно, что

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

где $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x)$ зависит от выбора переменной x, т. е. сумма $S(x)$ функционального ряда является функцией точки x.

Пусть $\{S_n(x)\}$ — последовательность частичных сумм функционального ряда, определенных на одном и том же замкнутом интервале $[a, b]$. Функциональный ряд называется *равномерно сходящимся* к функции $S(x)$, определенной на $[a, b]$, если любому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такой номер N, не зависящий от $x \in [a, b]$, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий различие между понятиями сходимости и равномерной сходимости ряда.

Пример 4. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$, где $0 \leqslant x < 1$, частичная сумма есть

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{(1+x)^i} = 1 - \frac{1}{(1+x)^n}.$$

Покажем, что на рассматриваемом интервале ряд сходится.

Действительно, если $x = 0$, то $S_n(0) = S(0) = 0$. Пусть теперь $x > 0$. Докажем, что в этом случае $S(x) = 1$, т. е. по заданному $\varepsilon > 0$ найдем N такое, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство

$$\left| 1 - \frac{1}{(1+x)^n} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Решая это неравенство, получим

$$N = E\left(- \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1+x)} \right).$$

Из последнего равенства видно, что N вообще говоря, зависит не только от ε, но и от x, причем для одного и того же ε при x, приближающемся к нулю N неограниченно возрастает. Это означает, что по заданному ε мы не можем выбрать одно е д и н с т в е н н о е N для всех $x \in [0, 1]$, другими словами, ряд *не является равномерно сходящимся на указанном интервале.*

Приведенный пример показывает, что последовательность непрерывных на замкнутом интервале частичных сумм может сходиться к разрывной на этом интервале функции. Одна из причин, мотивирующих введение понятия равномерной сходимости ряда, заключается в том, что равномерно сходящийся ряд непрерывных функций имеет своей суммой также непрерывную функцию.

§ 8.2. Разложение функций в ряд Фурье. Теорема Дирихле

Многие задачи науки и техники связаны с периодическими функциями, отражающими циклические процессы.

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом $T > 0$, если она удовлетворяет равенству

$$f(x) = f(x + T). \tag{1}$$

Из практических соображений такие функции удобно представлять в виде тригонометрического ряда или его частичной суммы с достаточной степенью точности.

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{2}$$

называется *тригонометрическим*, причем a_n и b_n — действительные числа, не зависящие от x.

Пусть этот ряд сходится для любого x из интервала $[-\pi, \pi]$, тогда он определяет периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T=2\pi$.

Ряд вида (2) называется *рядом Фурье* для интегрируемой на интервале $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$, если коэффициенты его вычисляются по следующим формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx, \tag{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=1, 2,\dots), \tag{4}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1, 2, \dots). \tag{5}$$

Таким образом, мы можем формально рассматривать ряд Фурье для заданной функции $f(x)$. Однако при этом возникают следующие вопросы: 1) сходится ли ряд Фурье функции $f(x)$ и 2) если ряд сходится, то будет ли он иметь своей суммой $f(x)$? Ответы на поставленные вопросы дает теорема Дирихле. Прежде чем перейти к формулировке самой теоремы, напомним некоторые понятия.

Функция $f(x)$ называется *монотонной* на интервале, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу и таких, что $x_1<x_2$, выполняется только одно из неравенств $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ или $f(x_1)\geqslant f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на интервале, если его можно разбить на конечное число открытых интервалов, в каждом из которых функция монотонна.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на интервале, если она имеет на нем конечное число точек разрыва.

Обозначим через $f(a+0)$ предел функции $f(x)$ при стремлении x к a справа (правый предел), соответственно, через $f(a-0)$ — левый предел.

Теорема Дирихле. *Если функция $f(x)$, заданная в интервале $[-\pi, \pi]$, кусочно-монотонна и кусочно-непрерывна, то ряд Фурье этой функции сходится во всем интервале $[-\pi, \pi]$ и сумма его равна:*

1) $f(x)$ *во всех точках непрерывности, принадлежащих* $(-\pi, \pi)$;

2) $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ *во всех точках разрыва, принадлежащих* $(-\pi, \pi)$;

3) $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi+0)]$ *на концах интервала, т. е. в точках* $x=-\pi$ *и* $x=\pi$.

В дальнейшем мы будем писать, что

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

в смысле приведенной выше теоремы Дирихле.

Теорема Дирихле не утверждает равномерной сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$. Однако если усилить свойства, которым должна удовлетворять функция, т. е. потребовать от нее непрерывности на всем интервале $[-\pi, \pi]$, кусочной монотонности на нем и выполнения равенства $f(-\pi)=f(\pi)$, то ряд Фурье для такой функции будет равномерно сходиться к функции $f(x)$ на всем интервале $[-\pi, \pi]$.

Можно показать, что для четной функции *все коэффициенты b_n равны нулю*, а соответствующий *ряд Фурье не содержит синусов*:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \tag{6}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,). \tag{7}$$

Аналогично для нечетной функции *все коэффициенты a_n равны нулю* и соответствующий *ряд Фурье не содержит косинусов*:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx, \tag{8}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{9}$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{при} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 2x & \text{при} \quad 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

Решение. Определим коэффициенты Фурье функции $f(x)$. По формулам (3) и (4) находим коэффициенты a_0 и a_n:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\pi^2=\frac{3}{2}\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2x\cos nx\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx-\frac{2}{n}x\sin nx\Big|_{0}^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=-\frac{1}{\pi n}\left(\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{3}{\pi n^2}[1-(-1)^n],$$

т. е.

$$a_{2k}=0,\quad a_{2k-1}=-\frac{6}{\pi(2k-1)^2}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Коэффициенты b_n находим по формуле (5):

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx+\frac{2x}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=-\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n+2\frac{\pi}{n}(-1)^n\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

т. е.

$$b_{2k}=-\frac{1}{2k},\quad b_{2k-1}=\frac{1}{2k-1}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Таким образом, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{3}{4}\pi-\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin 2kx.$$

В интервале $(-\pi,\ \pi)$ ряд сходится к функции $f(x)$, а в точках $x=\pm\pi$ — к числу $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\frac{3}{2}\pi$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-\sin x & \text{при}\quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \sin x & \text{при}\quad 0<x<\pi.\end{cases}$$

Решение. Данная функция является четной, следовательно, все коэффициенты $b_n=0$, а a_n находятся по формуле (7):

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos nx\,dx\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi}.$$

Далее,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\,dx=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при}\quad n=2k-1,\\ -\dfrac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{при}\quad n=2k\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots).\end{cases}$$

Следовательно,

$$f(x)=|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

Отметим, что полученный ряд сходится к функции $|\sin x|$ на всем интервале $[-\pi,\ \pi]$.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при}\quad -\pi<x<0,\\ 0 & \text{при}\quad x=0,\\ 1 & \text{при}\quad 0<x<\pi.\end{cases}$$

Решение. Данная функция является нечетной, следовательно, все коэффициенты $a_n=0$, а b_n находятся по формуле (9):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n].$$

Таким образом, все четные коэффициенты b_n равны нулю, а нечетные имеют вид $b_{2k-1}=\dfrac{4}{\pi(2k-1)}$. Следовательно,

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x.$$

Очевидно, что сумма ряда в точках $x=0$ и $x=\pm\pi$ равна нулю.

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{при}\quad 0<x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при}\quad 1<x<2.\end{cases}$$

Решение. Поскольку функция задана в интервале, отличном от $(-\pi,\ \pi)$, произведем замену независимой переменной по формуле $x=\dfrac{x'+\pi}{\pi}$, или $x'=\pi(x-1)$. Таким образом, получаем следующую функцию:

$$f(x')=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}(x'+\pi) & \text{при}\ -\pi<x'\leqslant 0,\\ 1 & \text{при}\quad 0<x'<\pi.\end{cases}$$

Так как эта функция определена на интервале $(-\pi, \pi)$, то для нее можно записать ряд Фурье. Вычислим коэффициенты этого ряда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{x'+\pi}{\pi}\,dx'+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot dx'=\frac{3}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{x'+\pi}{\pi}\cos nx'\,dx'+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx'\,dx'=$$

$$=\frac{1}{n\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin nx'\,dx'=\frac{1}{\pi^2 n^2}\left[1-(-1)^n\right];$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{x'+\pi}{\pi}\sin nx'\,dx'+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx'\,dx'=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{0}x'\sin nx'\,dx'=-\frac{(-1)^n}{\pi n}.$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left[(2k-1)\pi(x-1)\right]-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left[n\pi(x-1)\right].$$

Вычислим значения суммы ряда на концах интервала:

$$\frac{1}{2}\left[f(0+0)+f(2-0)\right]=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Полученный результат дает возможность найти сумму числового ряда

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)^2}+\ldots.$$

Действительно, на основании теоремы Дирихле при $x=0$ или $x=2$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

§ 8.3. Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье

Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая на интервале $[-\pi, \pi]$ функция: это означает, что существует интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$. Тогда ряд Фурье для $f(x)$ имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (1)$$

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_0^x \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] dx. \qquad (2)$$

Эта функция во всем промежутке $[-\pi, \pi]$ разлагается в ряд Фурье, который сходится к $F(x)$ равномерно:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx). \qquad (3)$$

Определим коэффициенты этого ряда. Имеем

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\left\{F(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \right.$$

$$\left. - \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] \sin nx dx\right\} = -\frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx,$$

откуда $A_n = -b_n/n$. Аналогично находим $B_n = a_n/n$.

Подставив $x = 0$ в разложение (3), получим $0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, откуда $\frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$. Следовательно,

$$\int_0^x \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nx)\right],$$

или

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx. \qquad (4$$

Таким образом, интеграл от функции $f(x)$ получается *почленным интегрированием соответствующего ей ряда Фурье*.

Следует подчеркнуть то обстоятельство, что от ряда Фурье функции $f(x)$ не требуется сходимости к функции $f(x)$; сама же функция должна быть абсолютно интегрируемой.

Пример. Исходя из разложения в ряд Фурье функции

$$f(x)=\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$$

в интервале $(-\pi, \pi)$, получить разложение функции $\Phi(x)=x^2/4$ в ряд Фурье в том же интервале.

Решение. Интегрируя правую и левую части разложения в ряд Фурье функции $x/2$, получим

$$\frac{x^2}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\cos nx-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Для нахождения величины $\frac{A_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ воспользуемся равенством $A_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4}\,dx=\frac{\pi^6}{6}$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$ и окончательно разложение функции $x^2/4$ в ряд Фурье имеет вид

$$\frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x-\frac{1}{3^2}\cos 3x+\ldots;$$

Перейдем теперь к почленному дифференцированию рядов Фурье. Пусть мы имеем непрерывную на интервале $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $f(-\pi)=f(\pi)$ и имеющую абсолютно интегрируемую производную $f'(x)$. Запишем ряд Фурье для этой функции:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{5}$$

Ряд Фурье для $f'(x)$ имеет вид

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx). \tag{6}$$

Вычислим коэффициенты A_0, A_n, B_n:

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\,dx=0,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right\}=nb_n,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \right\} = -na_n.$$

Следовательно, ряд Фурье функции $f'(x)$ запишется так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx). \qquad (7)$$

Таким образом, ряд Фурье для $f'(x)$ получается *почленным дифференцированием соответствующего ряда Фурье для функции* $f(x)$. Условие $f(-\pi) = f(\pi)$ является здесь существенным, так как в противном случае свободный член $A_0/2$ ряда Фурье (6) не обязан быть равным нулю и тогда ряд Фурье для $f'(x)$ не может получиться из ряда Фурье для $f(x)$ почленным дифференцированием.

Отметим, что вопрос о сходимости ряда Фурье (7) к производной $f'(x)$ остается открытым. Эту сходимость требуется устанавливать отдельно, пользуясь теми или иными достаточными признаками, например, теоремой Дирихле.

§ 8.4 Численный гармонический анализ. Тригонометрическое интерполирование

Операция представления функции $f(x)$ рядом Фурье называется *гармоническим анализом*. При практических же расчетах мы вынуждены ограничиться только несколькими первыми членами ряда Фурье. В результате мы получаем лишь приближенное аналитическое выражение для функции $f(x)$ в виде тригонометрического многочлена N-го порядка

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi). \qquad (1)$$

Кроме того, формулы (3) — (5) § 8.2 для вычисления коэффициентов Фурье пригодны лишь в случае аналитического задания функции. На практике, как правило, функция $f(x)$ задается в виде таблицы или графика. Поэтому возникает задача приближенного отыскания коэффициентов Фурье по конечному числу имеющихся значений функции.

Обобщая вышесказанное, сформулируем следующую задачу численного или, как его еще часто называют, практического гармонического анализа: *аппроксимировать на интервале* $(0, T)$ *тригонометрическим многочленом N-го порядка функцию* $y = f(x)$, *для которой известны m ее значений* $y_k = f(x_k)$ *при* $x_k = kT/m$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$.

Тригонометрический многочлен для функции, определенной на интервале $(0, T)$, имеет вид

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} x \right) \quad (0 \leqslant x \leqslant T). \qquad (2)$$

Коэффициенты a_n и b_n определяются следующими соотношениями:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos n\frac{2\pi}{T}x\,dx, \tag{3}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots, N).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin n\frac{2\pi}{T}x\,dx \tag{4}$$

Применяя в соотношениях (3) и (4) формулу прямоугольников для вычисления интегралов по значениям подынтегральных выражений в точках $x_k = kT/m$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$, имеем

$$a_n = \frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k \cos n\frac{2\pi k}{m}, \tag{5}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots, N).$$

$$b_n = \frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k \sin n\frac{2\pi k}{m} \tag{6}$$

Таким образом, тригонометрический многочлен (2), коэффициенты a_n и b_n которого находятся по формулам (5) и (6), служит решением поставленной задачи.

Можно показать, что при $m > 2N$ многочлен (2) дает наилучшее приближение к функции $f(x)$ в смысле метода наименьших квадратов, если коэффициенты его вычисляются по формулам (5) и (6). Иными словами, коэффициенты (5) и (6) минимизирую сумму квадратов отклонений

$$\delta_N^2 = \sum_{k=0}^{m-1}[Q_N(x_k) - y_k]^2. \tag{7}$$

В частном случае при $m = 2N$ коэффициенты a_n и b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1)$ определяются соотношениями (5) и (6), а коэффициент a_N есть

$$a_N = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k y_k. \tag{8}$$

Сам же многочлен $Q_N(x)$ становится интерполяционным многочленом, так как в этом случае при любом b_N выполняются соотношения $Q_N(x_k) = y_k$ для всех $x_k = kT/m$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$.

Пример. Исследуем динамику производства сахара из сахарной свеклы. Это производство носит периодический характер, обусловленный периодичностью выращивания и условиями хранения сырья Поэтому в качестве функции, аппроксимирующей динамику производства сахара, можно принять тригонометрический многочлен (2) при $m = 12$. (Это соответствует числу месяцев в годовом цикле и позволяет выявить специфическую особенность — сезонность производства.) Следовательно,

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos n\frac{\pi}{6}x + b_n \sin n\frac{\pi}{6}x\right) \quad (0 \leqslant x \leqslant 11).$$

Таблица 8.1

Месяцы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	$\frac{1}{6}\Sigma$
x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Объем производства в усл. ед.	95	71	55	43	36	31	28	26	25	45	91	102	108
$\cos\frac{\pi}{6}x_k$	1	0,866	0,5	0	—0,5	—0,866	—1	—0,866	—0,5	0	0,5	0,866	
$\sin\frac{\pi}{6}x_k$	0	0,5	0,866	1	0,866	0,5	0	—0,5	—0,866	—1	—0,866	—0,5	
$\cos\frac{\pi}{3}x_k$	1	0,5	—0,5	—1	—0,5	0,5	1	0,5	—0,5	—1	—0,5	0,5	
$\sin\frac{\pi}{3}x_k$	0	0,866	0,866	0	—0,866	—0,866	0	0,866	0,866	0	—0,866	—0,866	
$\cos\frac{\pi}{2}x_k$	1	0	—1	0	1	0	—1	0	1	0	—1	0	
$\sin\frac{\pi}{2}x_k$	0	1	0	—1	0	1	0	—1	0	1	0	—1	
$\cos\frac{2\pi}{3}x_k$	1	—0,5	—0,5	1	—0,5	—0,5	1	—0,5	—0,5	1	—0,5	—0,5	
$\sin\frac{2\pi}{3}x_k$	0	0,866	—0,866	0	0,866	—0,866	0	0,866	—0,866	0	0,866	—0,866	

Месяцы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	$\frac{1}{6}\Sigma$
x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Объем производства в усл. ед.	95	71	55	43	36	31	28	26	25	45	91	102	108
$y_k \cos \frac{\pi}{6} y_k$	95	61,49	27,5	0	—18	—26,85	—28	—22,52	—12,5	0	45,5	88,33	34,99
$y_k \sin \frac{\pi}{6} y_k$	0	35,5	47,63	43	31,18	15,5	0	—13	21,65	—45	—78,81	—51	—6,11
$y_k \cos \frac{\pi}{3} y_k$	95	35,5	—27,5	—43	—18	15,5	28	13	—12,5	—45	—45,5	51	7,75
$y_k \sin \frac{\pi}{3} y_k$	0	61,49	47,63	0	31,18	—26,85	0	22,52	21,65	0	—78,81	—88,33	—11,98
$y_k \cos \frac{\pi}{2} y_k$	95	0	—55	0	36	0	—28	0	25	0	—91	0	—3
$y_k \sin \frac{\pi}{2} y_k$	0	71	0	—43	0	31	0	—26	0	45	0	—102	—4
$y_k \cos \frac{2\pi}{3} y_k$	95	—35,5	—27,5	43	—18	—15,5	28	—13	—12,5	45	—45,5	—51	—1,25
$y_k \sin \frac{2\pi}{3} y_k$	0	61.49	—47,63	0	31,18	—26,85	0	22,52	—21,65	0	78,81	—88,33	1,59

В экономических исследованиях для хорошей аппроксимации динамического периодического ряда обычно выбирают не более четырех гармоник.

Выражения для коэффициентов a_n и b_n имеют следующий вид:

$$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{11} y_k \cos n\frac{\pi}{6}x_k, \quad b_n=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{11} y_k \sin n\frac{\pi}{6}x_k.$$

Вычислим эти коэффициенты для первых четырех гармоник многочлена $Q_N(x)$. Необходимые выкладки оформим в виде таблицы (см. табл. 8.1 на стр. 304, 305).

Из приведенной таблицы получаем, что

$$a_0 = 108;\ a_1 = 34{,}99;\ a_2 = 7{,}75;\ a_3 = -3;\ a_4 = -1{,}25;$$
$$b_1 = -6{,}11;\ b_2 = -11{,}98;\ b_3 = -4;\ b_4 = 1{,}59.$$

Таким образом, мы имеем следующие четыре математические модели сезонности для производства сахара:

$$Q_1(x)=54+34{,}99\cos\frac{\pi}{6}x-6{,}11\sin\frac{\pi}{6}x;$$

$$Q_2(x)=54+34{,}99\cos\frac{\pi}{6}x-6{,}11\sin\frac{\pi}{6}x+7{,}75\cos\frac{\pi}{3}x-11{,}98\sin\frac{\pi}{3}x;$$

$$Q_3(x)=54+34{,}99\cos\frac{\pi}{6}x-6{,}11\sin\frac{\pi}{6}x+7{,}75\cos\frac{\pi}{3}x-11{,}98\sin\frac{\pi}{3}x-$$
$$-3\cos\frac{\pi}{2}x-4\sin\frac{\pi}{2}x;$$

$$Q_4(x)=54+34{,}99\cos\frac{\pi}{6}x-6{,}11\sin\frac{\pi}{6}x+7{,}75\cos\frac{\pi}{3}x-11{,}98\sin\frac{\pi}{3}x-$$
$$-3\cos\frac{\pi}{2}x-4\sin\frac{\pi}{2}x-1{,}25\cos\frac{2\pi}{3}x+1{,}59\sin\frac{2\pi}{3}x.$$

Сравнение $Q_i(x_k)$ с соответствующими значениями y_k показывает, что уже первая гармоника дает в общем правильную модель динамики производства сахара, отражая ее сезонность.

Вычислим средние квадратические отклонения $\delta_i=\sqrt{\sum\limits_{k=0} [Q_i(x_k)-y_k]^2}$ для всех $Q_i(x)$; находим $\delta_1 = 37{,}80$; $\delta_2 = 14{,}40$; $\delta_3 = 7{,}59$; $\delta_4 = 5{,}75$. Как и следовало ожидать, значения δ_i монотонно убывают с ростом i, причем δ_4 мало отличается от δ_3. Кроме того, сами значения δ_3 и δ_4 достаточно малы, так что уже многочлен $Q_3(x)$ является хорошей аппроксимацией ряда, характеризующего годовую динамику производства сахара.

§ 8.5. Численные методы определения коэффициентов Фурье

Пусть задан ряд Фурье, сходящийся к периодической функции $f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx), \tag{1}$$

где

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2}$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{3}$$

В предыдущем параграфе мы сформулировали задачу аппроксимации функции $f(x)$ тригонометрическим многочленом $Q_N(x)$. Там же при вычислении коэффициентов a_m и b_m с помощью интегралов мы использовали формулу прямоугольников.

В общем случае приближенное вычисление коэффициентов a_m и b_m основано на замене интегралов в формулах (3) и (4) § 8.4 их значениями, получаемыми по одной из формул приближенного интегрирования. В настоящем параграфе мы воспользуемся формулой трапеций.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ является периодической с периодом 2π. Заметим, что вместо обычных пределов интегрирования от $-\pi$ до π при определении коэффициентов a_m и b_m можно рассматривать любой интервал интегрирования длиной 2π. Для удобства вычислений мы возьмем интервал от 0 до 2π, так что

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

Разделив интервал $[0, 2\pi]$ на N равных частей, в результате получим точки деления $0, 1\cdot\frac{2\pi}{N}, 2\cdot\frac{2\pi}{N}, \ldots, (N-1)\frac{2\pi}{N}, 2\pi$. Соответствующие значения функции $f(x)$ в точках деления обозначим через y_0, $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}, y_N = y_0$. Применяя формулу трапеций, получаем следующие приближенные формулы для вычисления коэффициентов a_m, b_m:

$$\frac{N}{2}a_0 = \sum_{k=0}^{N-1} y_k = y_0 + y_1 + \ldots + y_{N-1}; \tag{6}$$

$$\frac{N}{2}a_m = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cos k\frac{2m\pi}{N} = y_0 + y_1\cos\frac{2m\pi}{N} + \ldots + y_{N-1}\cos(N-1)\frac{2m\pi}{N}; \tag{7}$$

$$\frac{N}{2}b_m = \sum_{k=1}^{N-1} y_k \sin k\frac{2m\pi}{N} = y_1\sin\frac{2m\pi}{N} + \ldots + y_{N-1}\sin(N-1)\frac{2m\pi}{N}. \tag{8}$$

Пусть $N = 12$, т. е. интервал от 0 до 2π разбит на 12 равных частей, так что используются значения аргумента $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \ldots, \frac{11\pi}{6}$, им соответствуют значения функции $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{11}$, а величины, на которые умножаются эти значения, таковы: ± 1; $\pm\sin\frac{\pi}{6} = \pm 0{,}5$; $\pm\sin\frac{\pi}{3} = \pm 0{,}866$. Отсюда, опуская громоздкие выкладки, получим

$$6a_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11},$$
$$6a_1 = (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8)\sin\frac{\pi}{6} + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7)\sin\frac{\pi}{3} + (y_0 - y_6),$$
$$6a_2 = (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10})\sin\frac{\pi}{6} + (y_0 + y_6 - y_3 - y_9),$$
$$6a_3 = y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10},$$
$$6b_1 = (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11})\sin\frac{\pi}{6} + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10})\sin\frac{\pi}{3} + (y_3 - y_9),$$
$$6b_2 = (y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11})\sin\frac{\pi}{3},$$
$$6b_3 = y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11}$$
и т. д.

Чтобы свести к минимуму число необходимых арифметических операций для получения значений a_m и b_m, используют специальную вычислительную схему — *схему Рунге.*

I шаг. Выписывают значения функции $f(x)$ в следующем порядке:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ & y_{11} & y_{10} & y_9 & y_8 & y_7 & \end{array}$$

II шаг. Подсчитывают суммы и разности каждой пары значений, стоящих одно под другим. Полученные суммы и разности выписывают таким образом:

$$\begin{array}{r|ccccccc} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ & & y_{11} & y_{10} & y_9 & y_8 & y_7 & \\ \hline \text{суммы} & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \text{разности} & & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & \end{array} \tag{6}$$

III шаг. Аналогичные операции производят над суммами и разностями (6):

$$\begin{array}{rcccc@{\qquad}ccc} & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \\ & u_6 & u_5 & u_4 & & v_5 & v_4 & \\ \hline \text{суммы} & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & g_1 & g_2 & g_3 \\ \text{разности} & d_0 & d_1 & d_2 & & h_1 & h_2 & \end{array} \tag{7}$$

IV шаг. Вычисляют значения a_m и b_m по приближенным формулам

$$\left.\begin{aligned} 6a_0 &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3, \\ 6a_1 &= d_0 + 0{,}866d_1 + 0{,}5d_2, \\ 6a_2 &= (c_0 - c_3) + 0{,}5(c_1 - c_2), \\ 6a_3 &= d_0 - d_2, \\ 6b_1 &= 0{,}5g_1 + 0{,}866g_2 + g_3, \\ 6b_2 &= 0{,}866(h_1 + h_2), \\ 6b_3 &= g_1 - g_3 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и т. д.

Для наглядного сравнения полученных по приближенным формулам коэффициентов a_m и b_m с точными их значениями приведем пример, в котором функция задана аналитически.

Пример. Рассмотрим периодическую функцию с периодом 2π:

$$y=f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\pi} & \text{при } 0<x<\pi, \\ 1 & \text{при } \pi<x<2\pi, \\ 0 & \text{при } x=2\pi. \end{cases}$$

Составим таблицу

x_k	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y_k	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	1	1	1	1	1	1

Выпишем согласно схеме Рунге значения y_k и произведем указанные в ней сложения и вычитания [см. формулы (6)]:

$$\begin{array}{rccccccc}
 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
\text{суммы} & 0 & \frac{7}{6} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{11}{6} & 1 \\
\text{разности} & & -\frac{5}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} &
\end{array}$$

Теперь произведем вычитания и сложения по отношению к найденным суммам и разностям [см. формулы (7)]:

$$\begin{array}{rcccc}
\multicolumn{5}{c}{\text{суммы}} \\
 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\
 & 1 & \frac{11}{6} & \frac{5}{3} & \\
\hline
\text{суммы} & 1 & 3 & 3 & \frac{3}{2} \\
\text{разности} & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccc}
\multicolumn{4}{c}{\text{разности}} \\
 & -\frac{5}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\
 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \\
\hline
\text{суммы} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\
\text{разности} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} &
\end{array}$$

Запишем теперь выражения для a_m и b_m:

$$6a_0=1+3+3+\frac{3}{2}; \qquad 6b_1=0,5(-1)+0,866(-1)-\frac{1}{2};$$

$$6a_1=-1-\frac{2}{3}\cdot 0,866-0,5\cdot\frac{1}{3}; \qquad 6b_2=0,866\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right);$$

$$6a_2=\left(1-\frac{3}{2}\right)+0,5(3-3); \qquad 6b_3=-1-\left(-\frac{1}{2}\right).$$

$$6a_3=-1-\left(-\frac{1}{3}\right);$$

Отсюда

$$a_0 = 1{,}417;\quad a_1 = -0{,}291;\quad a_2 = -0{,}083;\quad a_3 = -0{,}111,$$
$$b_1 = -0{,}311;\quad b_2 = -0{,}144;\quad b_3 = -0{,}083.$$

Для сравнения приведем точные значения коэффициентов:

$$a_0 = 1{,}500;\quad a_1 = -0{,}203;\quad a_2 = 0{,}000;\quad a_3 = -0{,}022;$$
$$b_1 = -0{,}318;\quad b_2 = -0{,}159;\quad b_3 = -0{,}106.$$

Чтобы получить значения коэффициентов по приближенным формулам с большей точностью, можно обратиться к схемам с бо́льшим числом ординат.

Следует отметить, что практический гармонический анализ дает возможность получать аналитические выражения, аппроксимирующие заданные функции с наименьшей средней квадратической ошибкой.

Упражнения

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x\cos x$ $(-\pi < x < \pi)$.

Ответ: $x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\sin nx.$

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x\sin x$ $(-\pi < x < \pi)$.

Ответ: $x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx.$

3. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x) = x(\pi - x)$ $(0 \leqslant x < \pi)$.

Ответ: $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}.$

4. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x) = x(\pi - x)$ $(0 \leqslant x < \pi)$.

Ответ: $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$

5. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\pi < x < 0, \\ x \text{ при } \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$

6. Для функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(0, \pi)$ и заданной в виде таблицы значений $y_k = f(x_k)$:

k	0	1	2	3
x_k	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
y_k	1	2	2,4	2,6

составить тригонометрический интерполяционный многочлен.

Ответ: $Q_2(x) = 2 - 0{,}7 \cos 2x - 0{,}3 \sin 2x - 0{,}3 \cos 4x + b_2 \sin 4x$.

7. Для функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(0, 1)$ и заданной в виде таблицы значений $y_k = f(x_k)$:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
y_k	1	0	−2	−3	0	2

составить тригонометрический многочлен не ниже второго порядка.

Ответ: $Q_2(x) = -1 + \frac{7}{3} \cos 2\pi x - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 2\pi x - \cos 4\pi x$.

Глава IX

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 9.1. Понятие о дифференциальном уравнении

Уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называется *дифференциальным уравнением*.

Например,

$$\frac{dy}{dx} = 2(y-3); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = t+1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

$$y' = x^2; \quad x\,dy = y^3\,dx.$$

Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Таковы, например, дифференциальные уравнения

$$x^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 2; \quad 2s\,dt = t\,ds.$$

Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных.*

Например, дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

есть уравнение в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

Так, например, уравнения

$$\frac{d^2 s}{dt^2}=t-1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$$

являются уравнениями второго порядка, а уравнения

$$\frac{ds}{dt}\cdot\cos t+\sin t=1; \quad (x^2-y^2)\,dx+(x^2+y^2)\,dy=0$$

— первого порядка.

В настоящей главе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка в самом общем случае содержит независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы до n-го порядка включительно и имеет вид

$$F(x, y, y', y'' \ldots, y^{(n)})=0. \tag{1}$$

В этом уравнении x — независимая переменная, y — неизвестная функция, y', y'',..., $y^{(n)}$ — производные этой функции.

Если левая часть дифференциального уравнения (1) является многочленом по отношению к производной максимального порядка от неизвестной функции, то степень этого многочлена называется *степенью* дифференциального уравнения.

Например, уравнение

$$(y'')^4+(y')^2-y^6+x^7=0$$

является уравнением второго порядка четвертой степени, а уравнение

$$(y')^2+x^4y^5-y^8+x^{10}=0$$

— уравнением первого порядка второй степени.

Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, может быть записано в виде

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Решением (или *интегралом*) уравнения (2) называется всякая дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т. е. такая, после подстановки которой в уравнение (2) оно обращается в тождество.

График решения обыкновенного дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Решение дифференциального уравнения, содержащее столько независимых произвольных постоянных (параметров), каков его порядок, называется *общим решением* (или *общим интегралом*) этого уравнения.

Геометрически общее решение дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых этого уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, которое может быть получено из общего при определенных числовых значениях произвольных постоянных, входящих в общее решение.

Произвольные постоянные, входящие в общее решение, определяются из так называемых начальных условий.

Задача с начальными условиями ставится так: найти решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющее дополнительным условиям, состоящим в том, что решение $y = \varphi(x)$ должно принимать вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка заданные числовые значения $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ при заданном числовом значении $x = x_0$ независимой переменной x:

$$y = y_0, \; y' = y_0', \; y'' = y_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0. \qquad (3)$$

Условия (3) называются *начальными условиями*; числа x_0, y_0, y_0', y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ — *начальными данными* решения, а задача отыскания решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям (3), — *задачей с начальными условиями*, или *задачей Коши*.

В случае уравнения первого порядка, т. е. при $n = 1$, получаем задачу Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $x = x_0$, $y = y_0$.

Геометрически задача Коши (для уравнения первого порядка) состоит в том, что из всего множества интегральных кривых, представляющих собой общее решение, нужно найти ту интегральную кривую, которая проходит через точку M_0 с координатами $x = x_0$, $y = y_0$

Пример. Для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 2x$ с начальным условием $y_0 = 2$ при $x_0 = 1$ общее решение имеет вид $y = x^2 + C$. Оно представляет собой семейство парабол. Если теперь в общее решение подставить начальные данные, то получим $2 = 1 + C$, т. е. $C = 1$. Следовательно, частное решение, удовлетворяющее указанному начальному условию, есть $y = x^2 + 1$. Геометрически это означает, что из всего множества парабол, представляющих общее решение дифференциального уравнения, выбираем одну, проходящую через точку M_0 (1, 2) (рис. 9.1).

Задача Коши имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области $R_{[a,\, b]} = \{|x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ и удовлетворяет в этой области *условию Липшица*

$$|f(x, \bar{y})| - f(x, y)| \leqslant N |\bar{y} - y|,$$

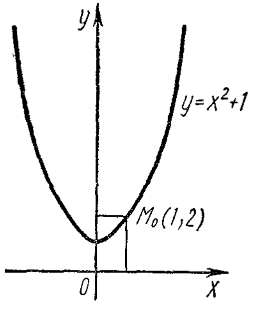


Рис 9.1

где N — постоянная Липшица, зависящая от a и b (a и b — границы области).

Методы точного интегрирования дифференциальных уравнений пригодны лишь для сравнительно небольшой части уравнений, встречающихся на практике.

Поэтому большое значение приобретают методы приближенного решения дифференциальных уравнений, которые в зависимости от формы представления решения можно разделить на две группы:

1) аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения;

2) численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

В данной главе для первой группы методов будут рассмотрены метод последовательных приближений (метод Пикара) и метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов; для второй группы — метод Эйлера и его модификации, методы Рунге — Кутта и Адамса.

§ 9.2. Метод последовательных приближений (метод Пикара)

Этот метод возник в связи с доказательством теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений. Он носит название *метода Пикара.*

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, \quad y), \tag{1}$$

правая часть которого в прямоугольнике $\{|x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant b\}$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y. Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x = x_0, \; y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Интегрируя обе части уравнения от x_0 до x, получим

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx,$$

или

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{3}$$

Уравнение (1) заменяется интегральным уравнением (3), в котором неизвестная функция y находится под знаком интеграла. Интегральное уравнение (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальному условию (2). Действительно,

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx = y_0.$$

Заменяя в равенстве (3) функцию y значением y_0, получим первое приближение

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx.$$

Затем в уравнении (3) заменяем y найденным значением y_1 и получаем второе приближение

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx.$$

Продолжая процесс далее, последовательно находим

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx.$$

Таким образом, составляем последовательность функций

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x), \ldots,\ y_n(x).$$

Справедлива следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема. *Пусть в окрестности точки* $(x_0;\ y_0)$ *функция* $f(x, y)$ *непрерывна и имеет ограниченную частную производную* $f'_y(x, y)$. *Тогда в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *последовательность* $\{y_i(x)\}$ *сходится к функции* $y(x)$, *служащей решением дифференциального уравнения* $y = f(x, y)$ *и удовлетворяющей условию* $y(x_0) = y_0$.

Оценка погрешности метода Пикара определяется по формуле

$$|y - y_n| \leqslant N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{4}$$

где $M = \max |f(x, y)|$ при $(x, y) \in R_{[a,\ b]}$, а N — постоянная Липшица для области $R_{[a,\ b]}$, равная $N = \max |f'_y(x, y)|$. Величина h для определения окрестности $[x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h]$ вычисляется по формуле

$$h = \min\left(a\ \frac{b}{M}\right); \tag{5}$$

a и b — границы области R.

Пример. Решить методом Пикара дифференциальное уравнение $y' = x^2 + y^2$ с начальным условием $x_0 = 0$, $y(x_0) = y_0 = 0$.

Р е ш е н и е. Переходим к интегральному уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} (x^2 + y^2)\, dx,$$

или с учетом начальных условий,

$$y = \int_0^x (x^2 + y^2)\, dx.$$

Получаем последовательные приближения:

$$y_1 = \int_0^x (x^2 + y_0^2)\, dx = \int_0^x (x^2 + 0)\, dx = \frac{x^3}{3};$$

$$y_2 = \int_0^x (x^2 + y_1^2)\, dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63};$$

$$y_3 = \int_0^x (x^2 + y_2^2)\, dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969}\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Оценим погрешность третьего приближения по формуле (4):

$$|y - y_n| \leqslant N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Так как функция $y' = x^2 + y^2$ определена и непрерывна во всей плоскости, то в качестве a и b можно взять любые числа. Для определенности выберем прямоугольник

$$R\{|x - x_0| \leqslant 0,5,\ |y - y_0| \leqslant 1\},$$

т. е.

$$R\{-0,5 \leqslant x \leqslant 0,5,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Тогда

$$M = \max|f(x, y)| = \max(x^2 + y^2) = 1,25;$$

$$N = \max|f'_y(x, y)| = \max|2y| = 2.$$

Поскольку $a = 0,5$, $b/M = 0,8$, по формуле (5) имеем

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = 0,5.$$

Решение y будет задано для $-0,5 \leqslant x \leqslant 0,5$. При $n = 3$ имеем:

$$|y - y_3| \leqslant \frac{1,25 \cdot 2^3 \cdot 0,5^4}{4!} = \frac{5}{192}.$$

Полученная оценка погрешности очень грубая, на самом деле погрешность значительно меньше.

§ 9.3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x=x_0,\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Правая часть этого уравнения есть аналитическая функция в начальной точке $M_0\left(x_0;\ y_0;\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}\right)$. Представим решение $y=y(x)$ уравнения (1) в окрестности точки x_0 в виде ряда Тейлора:

$$y=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\frac{y_0'''}{3!}(x-x_0)^3+\ldots, \tag{3}$$

где $|x-x_0|<h$, а h — достаточно малая величина. Для нахождения коэффициентов ряда (3) уравнение (1) дифференцируют по x нужное число раз, используя условия (2).

На практике величину $|x-x_0|$ берут настолько малой, что при требуемой степени точности остатком ряда можно пренебречь.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения $y'=y-4x+3$ с начальным условием $x_0=0$, $y_0=3$.

Решение. Имеем

$$y''=y'-4=y-4x-1,\quad y'''=y''=y-4x-1,\quad y^{\mathrm{IV}}=y'''.$$

Используя начальное условие, находим

$$y_0'=y_0-4x_0+3=3+3=6,$$
$$y_0''=y_0-4x_0-1=3-1=2,$$
$$y'''=2;\ y^{\mathrm{IV}}=2,\ \ldots,\ y^{(n)}=y^{(n-1)}=2.$$

Подставляя y_0', y_0'', y_0''' в ряд Тейлора, получим

$$y=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\frac{y_0'''}{3!}(x-x_0)^3+\frac{y_0^{\mathrm{IV}}}{4!}(x-x_0)^4+\ldots=$$
$$=3+6x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{12}+\ldots.$$

Точное решение заданного уравнения есть функция

$$y=2e^x+4x+1.$$

Если положить $h=0{,}1$, то можно составить таблицу значений решения заданного дифференциального уравнения.

Таблица 9.1

x_i	0	0,1	0,2	0,3
Значения, полученные из аналитического решения	3	3,6021	4,2428	4,8996
Приближенное решение с помощью степенного ряда . . .	3	3,6103	4,2427	4,8990

Пример 2. Найти решение уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющее условию $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Решение. Находим

$$y'' = 2x + 2yy'$$
$$y''' = 2 + 2\,[(y')^2 + yy'],$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n+2)} = 2\,[y^{(n)}\,y' + ny^{(n-1)}\,y'' +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot y^{(n-2)}\,y''' + \dots + ny'y^{(n)} + y\cdot y^{(n+1)}].$$

Из последних соотношений и начального условия получим:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= y_0' = 0, & y^{\mathrm{V}}(x_0) &= y_0^{\mathrm{V}} = 0,\\ y''(x_0) &= y_0'' = 0, & y^{\mathrm{VI}}(x_0) &= y_0^{\mathrm{VI}} = 0,\\ y'''(x_0) &= y_0''' = 2, & y^{\mathrm{VII}}(x_0) &= y^{\mathrm{VII}} = 80,\\ y^{\mathrm{IV}}(x_0) &= y_0^{\mathrm{IV}} = 0, & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Следовательно, можно записать

$$y \approx \frac{2x^3}{3!} + \frac{80x^7}{7!} + \dots,$$

или

$$y \approx \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \dots.$$

Ранее этот же пример мы решали методом Пикара и установили, что погрешность при $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 0{,}5$ не превосходит $2 \cdot 10^{-5}$.

Представление искомого решения в виде ряда Тейлора особенно удобно для небольшого промежутка интегрирования вблизи начальных значений. Чаще всего такое решение является вспомогательным при применении других методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений (методов Адамса, Милна, Штермера).

§ 9.4. Численное интегрирование дифференциальных уравнений. Метод Эйлера

Решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ численным методом — это значит для заданной последовательности аргументов x_0, x_1, ..., x_n и числа y_0, не определяя функцию $y = F(x)$, найти такие значения $y_1, y_2, \dots, y_n$, что $y_i = F(x_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ и $F(x_0) = y_0$.

Таким образом, численные методы позволяют вместо нахождения функции $y = F(x)$ получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов. Величина $h = x_k - x_{k-1}$ называется *шагом интегрирования*.

Рассмотрим некоторые из численных методов.

Метод Эйлера. Этот метод является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в основу метода Эйлера, являются исходными для ряда других методов.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x = x_0, \ y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Требуется найти решение уравнения (1) на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей и получим последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, а $h = (b - a)/n$ — шаг интегрирования.

Выберем k-й участок $[x_k, x_{k+1}]$ и проинтегрируем уравнение (1):

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\,dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} y'\,dx = y(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k,$$

т. е.

$$y_{k+1} = y_k + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\,dx. \tag{3}$$

Если в последнем интеграле подынтегральную функцию на участке $[x_k, x_{k+1}]$ принять постоянной и равной начальному значению в точке $x = x_k$, то получим

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k, y_k)\,dx = f(x_k, y_k)\cdot x\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) = y'_k h.$$

Тогда формула (3) примет вид

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h. \tag{3'}$$

Обозначив $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, т. е. $y'_k h = \Delta y_k$, получим

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k. \tag{4}$$

Продолжая этот процесс и каждый раз принимая подынтегральную функцию на соответствующем участке постоянной и равной ее значению в начале участка, получим таблицу решений дифференциального уравнения на заданном отрезке $[a, b]$. Равенство (4) означает, что на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ интегральная кривая $y = y(x)$ приближенно заменяется прямолинейным отрезком, выходящим из точки M_k $(x_k; y_k)$ с угловым коэффициентом $f(x_k, y_k)$. В качестве приближения искомой интегральной кривой получаем ломаную линию с вершинами в точках M_0 $(x_0; y_0)$, M_1 $(x_1; y_1)$, ..., M_n $(x_n; y_n)$. Первое звено касается истинной интегральной кривой в точке M_0 $(x_0; y_0)$ (рис. 9.2).

Если функция $f(x, y)$ в некотором прямоугольнике

$$R\{|x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b\}$$

удовлетворяет условию

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2| \ (N = \text{const}) \tag{5}$$

и, кроме того,

$$\left|\frac{d\bar{f}}{dx}\right| = \left|\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \bar{f}\,\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\right| \leqslant M \quad (M = \text{const}), \tag{6}$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \leqslant \frac{hM}{2N}\,[(1 + hN)^n - 1], \tag{7}$$

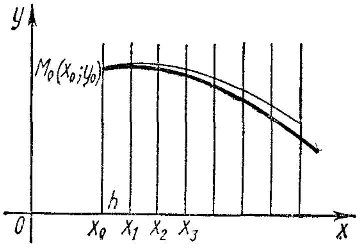


Рис. 9.2

где $y(x_n)$ — значение точного решения уравнения (1) при $x = x_n$, а y_n — приближенное значение, полученное на n-м шаге.

Формула (7) имеет в основном теоретическое применение. На практике, как правило, применяют «двойной просчет». Сначала расчет ведется с шагом h, затем шаг дробят и повторный расчет ведется с шагом $h/2$. Погрешность более точного значения y_n^* оценивается формулой

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx |y_n^* - y_n|. \tag{8}$$

Пример 1. Проинтегрировать методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = y - x$ с начальным условием $x_0 = 0$, $y_0 = 1{,}5$ на отрезке $[0;\ 1{,}5]$, приняв $h = 0{,}25$. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой.

Решение. Для удобства вычислений составим следующую таблицу (см. табл. 9.2).

I шаг. По начальным данным заполняем первую строку в столбцах (2) и (3).

II шаг. Из уравнения $y_i' = y_i - x_i$ вычисляем y_i' ($i = 0, 1, \ldots, 5$) в столбце (4).

III шаг. Содержимое столбца (4) умножаем на h (вычисляем $\Delta y_i = hy_i'$; $i = 0, 1, \ldots, 5$) и записываем в столбец (5) этой же строки.

IV шаг. К содержимому столбца (3) прибавляем содержимое столбца (5) этой же строки (вычисляем $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$; $i = 0, 1, \ldots, 5$) и результат записываем в столбец (3) следующей строки. Определяем $x_{i+1} = x_i + h$ и затем шаги II, III, IV повторяем до тех пор, пока не будет пройден весь отрезок $[0;\ 1{,}5]$.

Таблица 9.2

i	x_i	y_i	$y_i' = y_i - x_i$	$\Delta y_i = hy_i'$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	1,5000	1,5000	0,3750
1	0,25	1,8750	1,6250	0,4062
2	0,50	2,2812	1,7812	0,4453
3	0,75	2,7265	1,9765	0,4941
4	1,00	3,2206	2,2206	0,5552
5	1,25	3,7758	2,5258	0,6314
6	1,50	4,4072		

Метод Эйлера может быть применен к решению систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений высших порядков. Однако в последнем случае дифференциальные уравнения должны быть приведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть задана система двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \tag{9}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \tag{10}$$

Приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ и $z(x_i) \approx z_i$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i, \\ z_{i+1} &= z_i + \Delta z_i, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_i &= hf_1(x_i, y_i, z_i), \\ \Delta z_i &= hf_2(x_i, y_i, z_i) \end{aligned}\right\} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Пример 2. Применяя метод Эйлера, решить численно систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = (z - y)\,x, \\ z' = (z + y)\,x \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 1{,}0000$, $z(0) = 1{,}0000$ на отрезке $[0;\ 0{,}6]$; шаг $h = 0{,}1$. Вычисления вести с одним запасным знаком.

Решение. Для проведения расчетов воспользуемся табл. 9.3. Последовательность действий ясна из таблицы.

Таблица 9.3

i	x_i	y_i	$y_i' = (z_i - y_i)\,x_i$	$\Delta y_i = y_i' h$	z_i	$z_i' = (z_i + y_i)\,x_i$	$\Delta z_i = z_i' h$
0	0	1,0000	0	0	1,0000	0	0
1	0,1	1,0000	0	0	1,0000	0,2000	0,0200
2	0,2	1,0000	0,0040	0,0004	1,0200	0,4040	0,0404
3	0,3	1,0004	0,0180	0,0018	1,0604	0,6182	0,0618
4	0,4	1,0022	0,0480	0,0048	1,1222	0,8498	0,0850
5	0,5	1,0070	0,1001	0,0100	1,2072	1,1071	0,1107
6	0,6	1,0170			1,3179		

Пример 3. Применяя метод Эйлера, составить на отрезке $[1;\ 1{,}5]$ таблицу значений решения дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$$

с начальными условиями $y(1) = 0{,}77$; $y'(1) = -0{,}44$ и шагом $h = 0{,}1$.

Решение. С помощью подстановки $y' = z$, $y'' = z'$ заменим данное уравнение системой уравнений

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -\dfrac{z}{x} - y \end{cases}$$

с начальными условиями $y(1) = 0{,}77$, $z(1) = -0{,}44$. Вычисления проведем с одним запасным знаком. Для проведения расчетов воспользуемся табл. 9.4.

Таблица 9.4

i	x_i	y_i	$y'_i = z_i$	$\Delta y_i = hy'_i$	z_i	$z'_i = -\dfrac{z_i}{x_i} - y_i$	$\Delta z_i = z'_i h$
0	1,0	0,77	−0,44	−0,044	−0,44	−0,33	−0,033
1	1,1	0,726	−0,473	−0,047	−0,473	−0,296	−0,030
2	1,2	0,679	−0,503	−0,050	−0,503	−0,260	−0,026
3	1,3	0,629	−0,529	−0,053	−0,529	−0,222	−0,022
4	1,4	0,576	−0,551	−0,055	−0,551	−0,183	−0,018
5	1,5	0,521			−0,569		

§ 9.5. Модификации метода Эйлера

Усовершенствованный метод Эйлера. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Требуется найти решение уравнения (1) на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), где $h = (b - a)/n$ — шаг интегрирования. Сущность усовершенствованного метода Эйлера состоит в следующем: сначала вычисляют вспомогательные значения искомой функции $y_{i+1/2}$ в точках $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$ с помощью формулы

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} y'_i, \tag{3}$$

затем находят значение правой части уравнения (1) в средней точке $y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ и определяют

$$y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1/2}. \tag{4}$$

Замечание. Оценка погрешности в точке x_i может быть получена с помощью «двойного просчета»: расчет повторяют с шагом $h/2$ и погрешность более точного значения y_i^* (при шаге $h/2$) оценивают приближенно следующим образом:

$$|y_i^* - y(x_i)| \approx \frac{1}{3} |y_i^* - y_i|, \tag{5}$$

где $y(x)$ — точное решение дифференциального уравнения. Усовершенствованный метод Эйлера является более точным по сравнению с методом, рассмотренным в § 9.4.

Пример 1. Проинтегрировать усовершенствованным методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = y - x$ с начальным условием $x_0 = 0$, $y_0 = 1,5$ на отрезке $[0, 1]$, приняв $h = 0,25$. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой.

Решение. Результаты вычислений приведены в табл. 9.5. Она заполняется следующим образом.

Таблица 9 5

i	x_i	y_i	$y_i' = f(x_i, y_i)$	$\frac{h}{2} \cdot y_i'$	$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$	$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} y_i'$	$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$	$hy'_{i+1/2}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0	1,5000	1,5000	0,1875	0,125	1,6875	1,5625	0,3906
1	0,25	1,8906	1,6406	0,2051	0,3750	2,0957	1,7207	0,4302
2	0,50	2,3208	1,8208	0,2276	0,6750	2,5484	1,8734	0,4684
3	0,75	2,7892	2,0392	0,2549	0,8750	3,0441	2,1691	0,5423
4	1,00	3,3315	2,3315	0,2914	1,1250	3,6229	2,4974	0,6243
5	1,25	3,9558	2,7058	0,3382	1,3750	4,2940	2,9190	0,7298
6	1,50	4,6856						

I шаг. По начальным данным заполняем первую строку в столбцах (2) и (3).

II шаг. Из уравнения $y_i' = f(x_i, y_i) = y_i - x_i$ вычисляем y_i' для столбца (4) $(i = 0, 1, \ldots, 5)$.

III шаг. Содержимое столбца (4) умножаем на $h/2$ и тем самым определяем $\frac{h}{2} \cdot y_i'$; результат записываем в столбец (5).

IV шаг. Содержимое столбца (6) получаем путем сложения текущего значения x_i и $h/2$.

V шаг. К содержимому столбца (3) прибавляем содержимое столбца (5) и результат записываем в столбец (7).

VI шаг. Найденные значения $x_{i+\frac{1}{2}}$, $y_{i+\frac{1}{2}}$ [столбцы (6) и (7)] соответственно подставляем в правую часть заданного дифференциального уравнения, определяем $y'_{i+\frac{1}{2}}$ и записываем в столбец (8).

VII шаг. Содержимое столбца (8) умножаем на шаг интегрирования h и определяем $hy'_{i+1/2}$ [столбец (9).]

VIII шаг. Содержимое столбца (3) прибавляем к содержимому столбца (9) и полученный результат $y_{i+1} = y_i + hy'_{i+\frac{1}{2}}$ $(i = 0, 1, \ldots, 5)$ записываем в столбец (3) следующей строки.

Далее весь процесс вычислений повторяем, начиная со II шага.

Усовершенствованный метод Эйлера — Коши. Сущность метода Эйлера — Коши состоит в следующем. Сначала определяют вспомогательную величину

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hy_i', \qquad (6)$$

затем вычисляют $\tilde{y}'_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$ и по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot \frac{y'_i + \tilde{y}'_{i+1}}{2} \tag{7}$$

находят соответствующее решение.

Оценка погрешности может быть осуществлена по формуле (5) после проведения повторного просчета с шагом $h/2$.

Пример 2. Пользуясь усовершенствованным методом Эйлера — Коши, проинтегрировать дифференциальное уравнение примера 1.

Решение. Результаты вычислений приведены в табл. 9.6. Заполнение таблицы производится следующим образом.

Таблица 96

i	x_i	y_i	$y'_i = y_i - x_i$	hy'_i	x_{i+1}	$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hy'_i$	$\tilde{y}'_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - x_{i+1}$	$h\tilde{y}'_{i+1}$	$\Delta y_i = \frac{hy'_i + h\tilde{y}'_{i+1}}{2}$
(1)	(2)	3	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	10)
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	0,25	1,8750	1,625	0,4062	0,3906
1	0,25	1,8906	1,6406	0,4102	0,50	2,3008	1,8008	0,4502	0,4302
2	0,50	2,3208	1,8208	0,4552	0,75	2,7760	2,0260	0,5065	0,4808
3	0,75	2,8016	2,0516	0,5129	1,00	3,3145	2,3145	0,5786	0,5458
4	1,00	3,3474	2,3474	0,5868	1,25	3,9342	2,6842	0,6710	0,6289
5	1,25	3,9763	2,7263	0,6816	1,50	4,6579	3,1579	0,7895	0,7355
6	1,50	4,7118							

I шаг. По начальным данным заполняем столбцы (2) и (3) первой строки.

II шаг. Определяем значение $y'_i = f(x_i, y_i) = y_i - x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, 5)$ для столбца (4).

III шаг. Найденное значение y'_i из столбца (4) умножаем на шаг интегрирования h и результат записываем в столбец (5).

IV шаг. Определяем $x_{i+1} = x_i + h$ $(i = 0, 1, \ldots, 5)$ для столбца (6).

V шаг К содержимому столбца (3) прибавляем содержимое столбца (5) и результат заносим в столбец (7), т. е. определяем $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hy'_i$.

VI шаг Найденные значения x_{i+1} и y_{i+1} подставляем в правую часть данного дифференциального уравнения и определяем $\tilde{y}'_{i+1}$ для столбца (8).

VII шаг. Результат столбца (8) умножаем на шаг интегрирования h и определяем $h\tilde{y}'_{i+1}$ [столбец (9)].

VIII шаг. Находим Δy_i [столбец (10)], для чего определяем полусумму величин, записанных в столбцах (5) и (9).

IX шаг. К содержимому столбца (3) прибавляем содержимое столбца (10) и результат заносим в столбец (3) следующей строки, т. е. определяем $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$

Затем весь процесс вычислений повторяем, начиная со II шага.

Усовершенствованный метод Эйлера — Коши с последующей итерационной обработкой. Метод Эйлера — Коши с итерационной обработкой является более точным, чем ранее рассмотренный метод Эйлера — Коши. Сущность его заключается в том, что производится итерационная обработка каждого найденного значения y_i. Вначале выбирается грубое приближение

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i), \tag{8}$$

затем строится итерационный процесс:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})]. \tag{9}$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока два последовательных приближения $y_{i+1}^{(k)}$ и $y_{i+1}^{(k+1)}$ не совпадут в интересующих вычислителя знаках. После этого принимается $y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$. Если после трех-четырех итераций при выбранном значении h совпадения нужных знаков не происходит, то следует уменьшить шаг расчета h.

Пример 3. Применяя метод итерационной обработки, найти с точностью до четырех совпадающих десятичных знаков решение уравнения $y' = y - x$ с начальным условием $y(0) = 1$. Решение получить на отрезке $[0; 1,5]$, выбрав $h = 0,25$.

Решение. По формуле (8) находим

$$y_1^{(0)} = y_0 + h(y_0 - x_0) = 1,5000 + 0,375 = 1,8750.$$

Далее, применяя итерационный процесс (9), последовательно определяем

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}[(y_0 - x_0) + (y_1^{(0)} - x_1)] =$$
$$= 1,5000 + 0,125\,(1,5000 + 1,875 - 0,25) = 1,89062;$$
$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2}[(y_0 - x_0) + (y_1^{(1)} - x_1)] =$$
$$= 1,5000 + 0,125\,(1,5000 + 1,89062 - 0,25) = 1,89258,$$
$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{h}{2}[(y_0 - x_0) + (y_1^{(2)} - x_1)] =$$
$$= 1,5000 + 0,125\,(1,5000 + 1,89258 - 0,25) = 1,89282;$$
$$y_1^{(4)} = y_0 + \frac{h}{2}[(y_0 - x_0) + (y_1^{(3)} - x_1)] =$$
$$= 1,5000 + 0,125\,(1,5000 + 1,89282 - 0,25) = 1,89285.$$

В двух последних приближениях совпадают четыре знака. Поэтому после округления можно принять $y_1 \approx 1,8929$.

Снова пользуясь формулой (8), при $i = 1$ находим

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,8929 + 0,25\,(1,8929 - 0,25) = 2,3036.$$

По формуле (9) определяем последовательные приближения:

$$y_2^{(1)} = 1,8929 + 0,125\,[1,6429 + (2,3036 - 0,50)] = 2,3237;$$
$$y_2^{(2)} = 1,8929 + 0,125\,[1,6429 + (2,3237 - 0,50)] = 2,32622;$$
$$y_2^{(3)} = 1,8929 + 0,125\,[1,6429 + (2,32622 - 0,50)] = 2,32654;$$
$$y_2^{(3)} = 1,8929 + 0,125\,[1,6429 + (2,32654 - 0,50)] = 2,32658.$$

Итерации можно прекратить и принять $y_2 \approx 2,3266$. Применяя далее формулы (8) и (9), получим решение данного уравнения. Результаты вычислений помещены в табл. 9.7 на стр. 326.

Таблица 9.7

i	x_i	y_i	$y_{i+1}^{(0)}$	$y_{i+1}^{(1)}$	$y_{i+1}^{(2)}$	$y_{i+1}^{(3)}$	$y_{i+1}^{(4)}$	y_{i+1}
0	0	1,5000	1,875	1,89062	1,89258	1,89282	1,89285	1,8929
1	0,25	1,8929	2,3036	2,3237	2,32622	2,32654	2,32658	2,3266
2	0,50	2,3266	2,78325	2,80908	2,81231	2,81271	2,81276	2,8128
3	0,75	2,8128	3,3285	3,36171	3,36586	3,3664	3,36645	3,3664
4	1,00	3,3664	3,9580	4,0007	4,00603	4,0067	4,00679	4,0068
5	1,25	4,0068	4,6960	4,7509	4,75776	4,75870	4,75872	4,7587
6	1,50	4,7587						

§ 9.6. Метод Рунге — Кутта

Метод Рунге — Кутта является одним из методов повышенной точности. Он имеет много общего с методом Эйлера.

Пусть на отрезке $[a, b]$ требуется найти численное решение уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, где $h = (b - a)/n$ — шаг интегрирования. В методе Рунге — Кутта, так же и в методе Эйлера, последовательные значения y_i искомой функции y определяются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \tag{3}$$

Если разложить функцию y в ряд Тейлора и ограничиться членами до h^4 включительно, то приращение функции Δy можно представить в виде

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{\mathrm{IV}}(x), \tag{4}$$

где производные $y''(x)$, $y'''(x)$, $y^{\mathrm{IV}}(x)$ определяются последовательным дифференцированием из уравнения (1).

Вместо непосредственных вычислений по формуле (4) в методе Рунге — Кутта определяются четыре числа:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y), \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x + h, y + k_3). \end{aligned} \tag{5}$$

Можно доказать, что если числам k_1, k_2, k_3, k_4 придать соответственно вес 1/6; 1/3; 1/3; 1/6, то средневзвешенное этих чисел, т. е.

$$\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{3}k_2+\frac{1}{3}k_3+\frac{1}{6}k_4 \tag{6}$$

с точностью до четвертых степеней равно значению Δy, вычисленному по формуле (4):

$$\Delta y=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4). \tag{7}$$

Таким образом, для каждой пары текущих значений x_i и y_i по формулам (5) определяются значения

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i,\ y_i),\\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2}\right),\\ k_3^{(i)} &= hf\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_2^{(i)}}{2}\right),\\ k_4^{(i)} &= hf(x_i+h,\ y_i+k_3^{(i)}), \end{aligned} \tag{8}$$

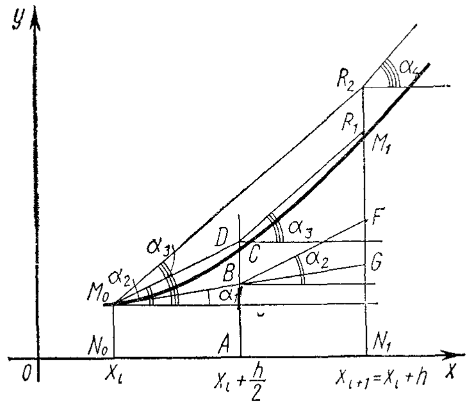


Рис. 9.3

по формуле (7) находится

$$\Delta y_i=\frac{1}{6}(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)})$$

и затем

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i.$$

Числа k_1, k_2, k_3, k_4 имеют простой геометрический смысл. Пусть кривая M_0CM_1 (рис. 9.3) представляет собой решение дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2). Точка C этой кривой лежит на прямой, параллельной оси Oy и делящей отрезок $[x_i,\ x_{i+1}]$ пополам, B и G — точки пересечения касательной, проведенной к кривой в точке M_0, с ординатами AC и N_1M_1. Тогда число k_1 с точностью до множителя h (где $h=x_{i+1}-x_i$) есть угловой коэффициент касательной в точке M_0 к интегральной кривой M_0CM_1, т. е. $k_1=hy_i'=$ $=hf(x_i,\ y_i)$.

Точка B имеет координаты $x=x_i+\frac{h}{2}$, $y=y_i+\frac{k_1}{2}$. Следовательно, число k_2 с точностью до множителя h есть угловой коэффициент касательной, проведенной к интегральной кривой в точке B (BF — отрезок этой касательной).

Через точку M_0 проведем прямую, параллельную отрезку BF. Тогда точка D имеет координаты $x=x_i+\frac{h}{2}$, $y=y_i+\frac{k_2}{2}$ и k_3 с точностью до множителя h — угловой коэффициент касательной, проведенной к интегральной кривой в точке D (DR_1 — отрезок этой каса-

Таблица 9.8

i	x	y	$y'=f(x, y)$	$k=hf(x, y)$	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}$	$f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}\right)$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}$	$f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}\right)$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+k_3^{(0)}$	$f(x_0+h, y_0+k_3^{(0)})$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
					$\frac{1}{6}\Sigma=\Delta y_0$
1	x_1	$y_1=y_0+\Delta y_0$	$f(x_1, y_1)$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$
	$x_1+\frac{h}{2}$	$y_1+\frac{k_1^{(1)}}{2}$	$f\left(x_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{k_1^{(1)}}{2}\right)$	$k_2^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
	$x_1+\frac{h}{2}$	$y_1+\frac{k_2^{(1)}}{2}$	$f\left(x_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{k_2^{(1)}}{2}\right)$	$k_3^{(1)}$	$2k_3^{(1)}$
	x_1+h	$y_1+k_3^{(1)}$	$f(x_1+h, y_1+k_3^{(1)})$	$k_4^{(1)}$	$k_4^{(1)}$
					$\frac{1}{6}\Sigma=\Delta y_1$
2	x_2	$y_2=y_1+\Delta y_1$	. . . .		. . .

тельной). Наконец, через точку M_0 проведем прямую, параллельную DR_1, которая пересечет продолжение M_1N_1 в точке R_2 $(x_i+h;\ y_i+k_3)$. Тогда k_4 с точностью до множителя h есть угловой коэффициент касательной, проведенной к интегральной кривой в точке R_2.

Вычисления по методу Рунге — Кутта удобно располагать по схеме, указанной в табл. 9.8. Эта таблица заполняется следующим образом:

I шаг. В столбцы (2) и (3) текущей строки записывают нужные значения x и y. (Если строка первая, то записывают начальные данные x_0 и y_0.)

II шаг. Значения x и y текущей строки подставляют в правую часть дифференциального уравнения (1), определяют $f(x, y)$ и записывают в столбец (4) этой же строки.

III шаг. Полученное значение $f(x, y)$ столбца (4) умножают на шаг интегрирования h, вычисляют $k=hf(x, y)$ и записывают в столбец (5) этой же строки.

IV шаг. Найденные значения k умножают на соответствующий коэффициент (на 1, если это k_1 или k_4, или на 2, если это k_2 или k_3), результат записывают в столбец (6) текущей строки.

Шаги I, II, III, IV повторяют для нахождения каждого k в i-м решении.

Результаты шестой строки суммируют, делят на 6, определяют $\Delta y_i = \frac{1}{6} \Sigma$ и $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Затем все вычисления повторяют, начиная с I шага, до тех пор, пока не будет пройден весь отрезок $[a, b]$.

Метод Рунге — Кутта имеет порядок точности h^4 на всем отрезке $[a, b]$. Оценка точности метода этого очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью «двойного просчета» по формуле

$$|y_i^* - y(x_i)| \approx \frac{y_i^* - y_i}{15}, \tag{9}$$

где $y(x_i)$ — значение точного решения уравнения (1) в точке x_i, а y_i^* и y_i — приближенные значения, полученные с шагом $h/2$ и h.

Если ε — заданная точность решения, то число n (число делений) для определения шага интегрирования $h = (b - a)/n$ выбирается таким образом, чтобы

$$h^4 < \varepsilon. \tag{10}$$

Однако шаг расчета можно менять при переходе от одной точки к другой.

Для оценки правильности выбора шага h используют равенство

$$q = \left| \frac{k_2^{(i)} - k_3^{(i)}}{k_1^{(i)} - k_2^{(i)}} \right|, \tag{11}$$

где q должно быть равно нескольким сотым, в противном случае шаг h уменьшают.

Пример 1 Дано дифференциальное уравнение $y' = y - x$ с начальным условием $y(0) = 1{,}5$. Вычислить с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$ решение этого уравнения при $x = 1{,}5$. Вычисления провести по методу Рунге — Кутта с двумя запасными знаками.

Решение. Выбираем начальный шаг вычислений h из условия $h^4 < 0{,}01$. Тогда $h < 0{,}3$. Для удобства вычислений примем $h = 0{,}25$. Весь отрезок интегрирования $[0; 1{,}5]$ разобьется на шесть равных частей точками $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}50$, $x_3 = 0{,}75$; $x_4 = 1{,}00$; $x_5 = 1{,}25$; $x_6 = 1{,}50$. Из начальных условий имеем $x_0 = 0$, $y_0 = 1{,}5$. Найдем первое приближение $y_1 = y_0 + \Delta y_0$, где

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\left(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}\right).$$

Используя формулы (8), получим:

$$k_1^{(0)} = (y_0 - x_0)\,h = 1{,}5000 \cdot 0{,}25 = 0{,}3750;$$

$$k_2^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right] h = [(1{,}5000 + 0{,}1875) - 0{,}125] \cdot 0{,}25 = 0{,}3906;$$

$$k_3^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right] h = [(1{,}5000 + 0{,}1953) - 0{,}125] \cdot 0{,}25 = 0{,}3926;$$

$$k_4^{(0)} = [(y_0 + k_3^{(0)}) - (x_0 + h)]\,h = [(1{,}5000 + 0{,}3926) - 0{,}125] \cdot 0{,}25 = 0{,}4106.$$

Таблица 9.9

i	x	y	$y' = f(x, y)$	$k = hf(x, y)$	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0 0,125 0,125 0,25	1,5000 1,6875 1,6953 1,8926	1,5000 1,5625 1,5703 1,6426	0,3750 0,3906 0,3926 0,4106	0,3750 0,7812 0,7852 0,4106
					0,3920
1	0,25 0,375 0,375 0,50	1,8920 2,0973 2,1073 2,3251	1,6420 1,7223 1,7323 1,8251	0,4105 0,4306 0,4331 0,4562	0,4105 0,8612 0,8662 0,4562
					0,4323
2	0,50 0,625 0,625 0,75	2,3243 2,5523 2,5652 2,8093	1,8243 1,9273 1,9402 2,0593	0,4561 0,4818 0,4850 0,5148	0,4561 0,9636 0,9700 0,5148
					0,4841
3	0,75 0,875 0,875 1,00	2,8084 3,0657 3,0823 3,3602	2,0584 2,1907 2,2073 2,3602	0,5146 0,5477 0,5518 0,5900	0,5146 1,0954 1,1036 0,5900
					0,5506
4	1,00 1,125 1,125 1,25	3,3590 3 6539 3,6751 3,9965	2,3590 2,5289 2,5501 2,7465	0,5898 0,6322 0,6375 0,6866	0,5898 1,2644 1,2750 0,6866
					0,6360
5	1,25 1,375 1,375 1,50	3,9950 4,3381 4,3654 4,7426	2,7450 2,9631 2,9904 3,2426	0,6862 0,7408 0,7476 0,8106	0,6862 1,4816 1,4952 0,8106
					0,7456
6	1,50	4,7406			

Следовательно,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\,(0,3750 + 2\cdot 0,3906 + 2\cdot 0,3926 + 0,4106) = 0,3920$$

и

$$y_1 = 1,5000 + 0,3920 = 1,8920.$$

Дальнейшее решение уравнения представлено в табл 9 9.

Таким образом, окончательно имеем $y\,(1,5) = 4,74$

Метод Рунге — Кутта может быть применен и к решению систем дифференциальных уравнений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f\,(x,\, y,\, z), \\ z' = g\,(x,\, y,\, z) \end{cases} \tag{12}$$

с начальными условиями

$$x = x_0,\ \ y\,(x_0) = y_0,\ \ z\,(x_0) = z_0. \tag{13}$$

В этом случае параллельно определяются числа Δy_i и Δz_i:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= \frac{1}{6}\,(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \\ \Delta z_i &= \frac{1}{6}\,(l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)}), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf\,(x_i,\, y_i,\, z_i), \\ l_1^{(i)} &= hg\,(x_i,\, y_i\,\, z_i); \\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2},\ z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right); \\ l_2^{(i)} &= hg\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2},\ z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right); \\ k_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2},\ z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right); \\ l_3^{(i)} &= hg\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2},\ z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right); \\ k_4^{(i)} &= hf\,(x_i + h,\ y_i + k_3^{(i)},\ z_i + l_3^{(i)}); \\ l_4^{(i)} &= hg\,(x_i + h,\ y_i + k_3^{(i)},\ z_i + l_3^{(i)}). \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда получим решение системы

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i.$$

Пример 2. Задана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y - x}{z}, \\[2mm] z' = \dfrac{2y}{z + x} \end{cases}$$

с начальными условиями $x_0 = 0,5$; $y_0 = 1$; $z_0 = 1$. Найти решение системы при $x = 0,6$. Вычисления вести с пятью знаками после запятой.

Решение. Выберем шаг $h=0,1$ и найдем числа $k_1, l_1, k_2, l_2, k_3, l_3, k_4, l_4$:

$$k_1=h\cdot\frac{2y_0-x_0}{z_0}=0,1\cdot\frac{2-0,5}{1}=0,15000;$$

$$l_1=h\cdot\frac{2y_0}{z_0+x_0}=0,1\cdot\frac{2}{1,5}=0,13333;$$

$$k_2=h\left[\frac{2\left(y_0+\frac{k_1}{2}\right)-\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{z_0+\frac{l_1}{2}}\right]=0,1\cdot\frac{2\cdot 1,075-0,55}{1,06667}=0,14100;$$

$$l_2=h\left[\frac{2\left(y_0+\frac{k_1}{2}\right)}{\left(z_0+\frac{l_1}{2}\right)+\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}\right]=0,1\cdot\frac{2\cdot 1,075}{1,06667+0,55}=0,13299;$$

$$k_3=h\left[\frac{2\left(y_0+\frac{k_2}{2}\right)-\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{z_0+\frac{l_2}{2}}\right]=0,1\cdot\frac{2\cdot 1,07050-0,55}{1,06650}=0,14918;$$

$$l_3=h\left[\frac{2\left(y_0+\frac{k_2}{2}\right)}{\left(z_0+\frac{l_2}{2}\right)+\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}\right]=0,1\cdot\frac{2\cdot 1,07050}{1,06650+0,55}=0,13245;$$

$$k_4=h\left[\frac{2(y_0+k_3)-(x_0+h)}{z_0+l_3}\right]=0,1\cdot\frac{2\cdot 1,14918-0,6}{1,13245}=0,14998;$$

$$l_4=h\left[\frac{2(y_0+k_3)}{(z_0+l_3)+(x_0+h)}\right]=0,1\cdot\frac{2\cdot 1,14918}{1,13245+0,6}=0,13266.$$

Следовательно,

$$\Delta y_0=\frac{1}{6}(0,15+2\cdot 0,14100+2\cdot 0,14918+0,14998)=0,14672;$$

$$\Delta z_0=\frac{1}{6}(0,13333+2\cdot 0,13299+2\cdot 0,13245+0,13266)=0,13281$$

и окончательно получаем значение искомых функций в точке $x=0,6$:

$$y_1=1+0,14672=1,14672;\quad z_1=1+0,13281=1,13281.$$

§ 9.7. Экстраполяционный метод Адамса

При решении дифференциального уравнения методом Рунге — Кутта необходимо производить много вычислений для нахождения каждого y_i. В том случае, когда правая часть уравнения имеет сложное аналитическое выражение, решение такого уравнения методом Рунге — Кутта вызывает большие трудности. Поэтому на практике применяется *метод Адамса*, который не требует многократного подсчета правой части уравнения.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, \ y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x = x_0, \ \ y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Требуется найти решение этого уравнения на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Выберем участок $[x_i, x_{i+1}]$ и проинтегрируем дифференциальное уравнение (1); тогда получим

$$y_{i+1} = y_i + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y'\, dx,$$

или

$$\Delta y_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y'\, dx. \tag{3}$$

Для нахождения производной воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона (ограничиваясь при этом разностями третьего порядка):

$$y' = y_i + t\Delta y'_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y'_{i-3}, \tag{4}$$

где $t = (x - x_i)/h$, или

$$y' = y'_i + t\Delta y'_{i-1} + \frac{t^2+t}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t^3+3t^2+2}{6}\Delta^3 y'_{i-3}. \tag{4'}$$

Подставляя выражение для y' из формулы (4') в соотношение (3) и учитывая, что $dx = h\, dt$, имеем

$$\Delta y_i = h\int\limits_0^1 \left(y'_i + t\Delta y'_{i-1} + \frac{t^2+t}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t^3+3t^2+2t}{6}\Delta^3 y'_{i-3}\right) dt =$$

$$= hy'_i + \frac{1}{2}\Delta(hy'_{i-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hy'_{i-3}). \tag{5}$$

Обозначим в дальнейшем

$$q_i = y'_i\, h = f(x_i, y_i)\cdot h \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда для любой разности имеем $\Delta^m q_i = \Delta^m (y'_i h)$ и

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}. \tag{6}$$

По формуле $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ получаем решение уравнения. Формула (6) носит название *экстраполяционной формулы Адамса*.

Для начала процесса нужны четыре начальных значения y_0, y_1, y_2, y_3 — так называемый *начальный отрезок*, который может быть найден, исходя из начального условия (2) с использованием одного из известных методов. Обычно начальный отрезок решения находится методом Рунге — Кутта.

Зная y_0, y_1, y_2, y_3, можно определить

$$q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0); \quad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1);$$
$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2); \quad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3). \tag{7}$$

Далее составляется таблица разностей величины q (табл. 9.10).

Таблица 9.10

i	x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q = hy'_i$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	x_0	y_0		$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1		$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	
2	x_2	y_2		$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2		
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3			
4	x_4	y_4						
5	x_5							
6	x_6							

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы (6). Используя числа q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$, которые располагаются в таблице по диагонали, по формуле (6), полагая в ней $n = 3$ (последнее известное значение y есть y_3), получают:

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0.$$

Полученное значение Δy_3 вносят в таблицу и находят $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Затем, используя x_4 и найденное значение y_4, находят $f(x_4, y_4)$, q_4, Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$, т. е. получается новая диагональ. По этим данным находят

$$\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2}\Delta q_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_1; \quad y_5 = y_4 + \Delta y_4.$$

Таким образом, продолжают таблицу решения, вычисляя правую часть дифференциального уравнения (1) на каждом этапе только один раз.

Для грубой оценки погрешности применяется *принцип Рунге*, который состоит в следующем:

1) находится решение дифференциального уравнения при шаге h;

2) значение шага h удваивается и находится решение при шаге $H = 2h$;

3) вычисляется погрешность метода по формуле

$$\varepsilon = \frac{|\widetilde{y}_n - \widetilde{y}_{2n}|}{2^m - 1}, \tag{8}$$

где $\widetilde{y}_n$ — значение приближенного вычисления при двойном шаге $H = 2h$, а $\widetilde{y}_{2n}$ — значение приближенного вычисления при шаге h.

Замечание. При вычислении с шагом h предполагается, что на каждом шаге допущена погрешность, пропорциональная h^{m+1}, а с шагом $2h$ — пропорциональная $(2h)^{m+1}$, если порядок точности метода определен и равен h^m.

Отметим, что в экстраполяционной формуле Адамса (6) третьи конечные разности $\Delta^3 q$ считаются постоянными. Поэтому величину h начального шага вычислений можно определить из неравенства $h^4 < \varepsilon$, где ε — заданная точность решения.

На практике следят за ходом третьих конечных разностей, выбирая h таким, чтобы соседние разности $\Delta^3 q_i$ и $\Delta^3 q_{i+1}$ отличались между собой не более чем на одну-две единицы заданного разряда (не считая запасных знаков).

Пример 1. Вычислить при $x = 1{,}5$ с точностью до 0,01 по методу Адамса значение решения дифференциального уравнения $y' = y - x$ с начальным условием $x_0 = 0$, $y_0 = 1{,}5$. Все вычисления вести с двумя запасными знаками.

Решение. Как и ранее, выбираем h из соотношения $h^4 < 0{,}01$, т. е. $h = 0{,}25$. Начальный отрезок y_0, y_1, y_2, y_3 возьмем из решения примера 1 § 9.6. Для решения этого уравнения составляем две таблицы: основную (табл. 9.11) и вспомогательную (табл. 9.12). Назначение их ясно из самих таблиц.

Таблица 9.11

i	x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q_i = hy'_i$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^2 q_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0	1,5000		1,5000	0,3750	0,0355	0,0101	0,0028
1	0,25	1,8920		1,6420	0,4105	0,0456	0,0129	0,0037
2	0,50	2,3243		1,8243	0,4561	0,0585	0,0166	0,0047
3	0,75	2,8084	0,5504	2,0584	0,5146	0,0751	0,0213	
4	1,00	3,3588	0,6356	2,3588	0,5897	0,0964		
5	1,25	3,9944	0,7450	2,7444	0,6861			
6	1,50	4,7394						

Таблица 9.12

i	q_i	$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	$\frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}$	$\frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$	Δy_i
3	0,5146	0,0293	0,0054	0,0011	0,5504
4	0,5897	0,0376	0,0069	0,0014	0,6356
5	0,6861	0,0482	0,0089	0,0018	0,7450

Окончательно имеем $y(1{,}5) = 4{,}74$.

Метод Адамса применяется также и для решения систем дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений n-го порядка.

Пусть задана система двух уравнений

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases} \tag{9}$$

Тогда экстраполяционные формулы Адамса для этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= p_i + \frac{1}{2}\Delta p_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 p_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 p_{i-3}, \\ \Delta z_i &= g_i + \frac{1}{2}\Delta g_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 g_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 g_{i-3}, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$p_i = hy_i' = hf_1(x_i, y_i, z_i), \qquad g_i = hz_i' = hf_2(x_i, y_i, z_i),$$

и

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i.$$

Пример 2. Применяя метод Адамса, решить численно систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = (z - y)\,x, \\ z' = (z + y)\,x \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 1{,}000$; $z(0) = 1{,}000$ на отрезке $[0;\ 0{,}6]$; шаг $h = 0{,}1$.

Решение. Начальный отрезок решения возьмем из табл. 9.3 (ранее мы решали эту систему методом Эйлера). Значения функций $y(x)$ и $z(x)$ при $x_4 = 0{,}4$; $x_5 = 0{,}5$ и $x_6 = 0{,}6$ будем искать с помощью формул (10), обозначив $f_1(x, y, z) = y' = (z - y)\,x$ и $f_2(x, y, z) = z' = (z + y)\,x$. Вычисления расположены в табл. 9.13, 9.14 и 9.15 (табл. 9.14 и 9.15 являются вспомогательными).

Таблица 9.13

i	x_i	y_i	Δy_i	p_i	Δp_i	$\Delta^2 p_i$	$\Delta^3 p_i$
0	0	1,0000	-	0,0000	0,0000	0,0004	0,0006
1	0,1	1,0000		0,0000	0,0004	0,0010	0,0010
2	0,2	1,0000		0,0004	0,0014	0,0020	0,0004
3	0,3	1,0004	0,0032	0,0018	0,0034	0,0024	
4	0,4	1,0036	0,0081	0,0052	0,0058		
5	0,5	1,0117	0,0150	0,0110			
6	0,6	1,0267					
i	x_i	z_i	Δz_i	g_i	Δg_i	$\Delta^2 g_i$	$\Delta^3 g_i$
0	0	1,0000		0,0000	0,0200	0,0004	0,0006
1	0,1	1,0000		0,0200	0,0204	0,0010	0,0013
2	0,2	1,0200		0,0404	0,0214	0,0023	0,0007
3	0,3	1,0604	0,0732	0,0618	0,0237	0,0030	
4	0,4	1,1336	0,0987	0,0855	0,0267		
5	0,5	1,2323	0,1271	0,1122			
6	0,6	1,3594					

Табл. 9.14 предназначена для определения правых частей данной системы и нахождения p_i и g_i, а табл. 9.15 — для определения Δy_i и Δz_i по разностям величин p и g, полученным в табл. 9.13.

Таблица 9.14

i	x_i	y_i	z_i	y_i'	p_i	z_i'	g_i
0	0,0	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,1	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,2000	0,0200
2	0,2	1,0000	1,0200	0,0040	0,0004	0,4040	0,0404
3	0,3	1,0004	1,0604	0,0180	0,0018	0,6182	0,0618
4	0,4	1,0036	1,1336	0,0520	0,0052	0,8549	0,0855
5	0,5	1,0117	1,2323	0,1103	0,0110	1,1220	0,1122

Таблица 9.15

i	p_i	$\frac{1}{2}\Delta p_{i-1}$	$\frac{5}{12}\Delta^2 p_{i-2}$	$\frac{3}{8}\Delta^3 p_{i-3}$	Δy_i
3	0,0018	0,0007	0,000425	0,000225	0,0032
4	0,0052	0,0017	0,000850	0,000375	0,0081
5	0,0110	0,0029	0,0010	0,00015	0,0150
i	g_i	$\frac{1}{2}\Delta g_{i-1}$	$\frac{5}{12}\Delta^2 g_{i-2}$	$\frac{3}{8}\Delta^3 g_{i-3}$	Δz_i
3	0,0618	0,0107	0,000425	0,000225	0,0732
4	0,0855	0,0118	0,000958	0,000488	0,0987
5	0,1122	0,0134	0,00125	0,00026	1,1271

Упражнения

1. Используя метод Пикара, найти три последовательных приближения решения дифференциального уравнения:

а) $y' = 4y\,(1 + x)$; начальное условие $y\,(0) = 1$;

б) $y' = x - y$; начальное условие $y\,(0) = 1$.

Ответы: а) $y_3 = 1 + 8x^2 + \frac{56}{3}x^3 + 18x^4 + 8x^5 + \frac{4}{3}x^6$;

б) $y_3 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$.

2. Найти первые семь членов разложения в степенной ряд решения $y = y\,(x)$ уравнения $y'' + 0{,}1\,(y')^2 + (1 + 0{,}1\,x)\,y = 0$ с начальными условиями $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 2$.

Ответ: $y(x) = 1 + 2x - 0{,}7x^2 - 0{,}2567x^3 + 0{,}051x^4 + 0{,}00147x^5 - 0{,}00101x^6$.

3. Найти решение дифференциального уравнения $y'' = 4x^2y + 2e^{-x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Ограничиться членами разложения в степенной ряд, содержащими x^6.

Ответ: $y(x) = x - x^2 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{13}{90}x^6$.

4. Полагая $h = 0,1$, методом Эйлера решить дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях на указанных интервалах:

$$\text{а) } y' = y + 3x;\ y(0) = -1;\ x \in [0;\ 0,5];$$

$$\text{б) } y' = x - 2y;\ y(0) = 0;\ x \in [0,\ 1].$$

Ответы: а) $y_1 = -1,1$; $y_2 = -1,18$; $y_3 = -1,238$; $y_4 = -1,2718$; $y_5 = -1,2790$; б) $y_1 = 0$, $y_2 = 0,01$; $y_3 = 0,0278$; $y_4 = 0,0524$; $y_5 = 0,08192$; $y_6 = 0,115536$; $y_7 = 0,152429$; $y_8 = 0,191943$; $y_9 = 0,233554$; $y_{10} = 0,276844$.

5. Применяя усовершенствованный метод Эйлера, найти на отрезке [0, 1] таблицу решения дифференциального уравнения $y' = y - \frac{2x}{y}$ при начальном условии $y(0) = 1$, приняв $h = 0,2$.

Ответ: $y_0 = 1$; $y_1 = 1,1836$; $y_2 = 1,3426$; $y_3 = 1,4850$; $y_4 = 1,6152$, $y_5 = 1,7362$.

6. Применяя усовершенствованный метод Эйлера — Коши, решить дифференциальное уравнение из упр. 5.

Ответ: $y_0 = 1$; $y_1 = 1,1867$; $y_2 = 1,3484$; $y_3 = 1,4938$; $y_4 = 1,6272$; $y_5 = 1,7542$.

7. Методом Рунге — Кутта, приняв $h = 0,1$, найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях на указанных интервалах:

$$\text{а) } y' = x + y^2;\ y(1) = 0;\ x \in [1,\ 2];$$

$$\text{б) } y' = x^2 - y;\ y(0) = 2;\ x \in [0,\ 1].$$

Ответы: а) $y_0 = 0$; $y_1 = 0,10536$; $y_2 = 0,223136$; $y_3 = 0,356601$; $y_4 = 0,510424$; $y_5 = 0,691497$; $y_6 = 0,910454$; $y_7 = 1,184648$; $y_8 = 1,544491$; $y_9 = 2,048721$; $y_{10} = 2,827617$; б) $y_0 = 2,00$; $y_1 = 1,81$; $y_2 = 1,64$; $y_3 = 1,49$; $y_4 = 1,36$, $y_5 = 1,25$; $y_6 = 1,16$; $y_7 = 1,09$; $y_8 = 1,04$; $y_9 = 1,01$.

8. Экстраполяционным методом Адамса решить дифференциальное уравнение $y' = 2x - y$ при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке [0, 1]. Начальный отрезок решения задан: $y_0 = 1$, $y_1 = 0,9145$; $y_2 = 0,8562$, $y_3 = 0,8225$ (принять $h = 0,1$).

Ответ: $y_4 = 0,8110$; $y_5 = 0,8196$; $y_6 = 0,8464$; $y_7 = 0,8898$; $y_8 = 0,9480$; $y_9 = 1,0197$; $y_{10} = 1,1037$.

Глава X
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 10.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

Приближенные методы решения наиболее разработаны для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. Для решения многих практических задач необходимо рассматривать так называемые *линейные* или *вполне линейные дифференциальные уравнения в частных производных*, т. е. дифференциальные уравнения первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержащие их произведений. Такие уравнения можно представить в следующем виде:

$$A(x\ y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+ \\ +a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x, y)z=F(x, y). \tag{1}$$

В уравнении (1) искомой является функция z, а x и y — независимые переменные. Функции $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — непрерывные функции от x и y, имеющие непрерывные частные производные.

Проведем классификацию дифференциальных уравнений в частных производных, основанную на рассмотрении уравнения (1). Введем обозначения

$$z_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad z_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad z_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad z_x=\frac{\partial z}{\partial x},\quad z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$$

(для удобства записи частных производных «штрихи» опускаются) и рассмотрим упрощенную форму уравнения (1)·

$$A(x, y)\,z_{xx}+B(x, y)\,z_{xy}+C(x, y)\,z_{yy}=0, \tag{2}$$

соответствующую (1) при $a\equiv b\equiv c\equiv F\equiv 0$.

Уравнение (2) всегда может быть приведено к одной из трех стандартных канонических форм. Этими формами являются эллиптические, параболические и гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. Тип уравнения определяется значением коэффициентов в выражении (2) и связан со знаком *дискриминанта* $\Delta = B^2(x, y) - 4A(x, y)\,C(x, y)$ в выражении (2).

В зависимости от знака дискриминанта имеем:

$\Delta < 0$ — *эллиптический тип* в точке (x, y);
$\Delta = 0$ — *параболический тип* в точке (x, y);
$\Delta > 0$ — *гиперболический тип* в точке (x, y).

Если коэффициенты A, B и C постоянные, не зависящие от x и y, то канонические уравнения являются полностью эллиптическими, параболическими или гиперболическими.

Чтобы показать, как строятся канонические дифференциальные уравнения в частных производных, рассмотрим выражение (2) с постоянными A, B и C. Введем две новые переменные

$$\xi = y + a_1 x,\quad \eta = y + a_2 x, \tag{3}$$

где

$$a_1=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A},\quad a_2=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

Поскольку уравнение (2) линейное относительно производных искомой функции $z(x, y)$, то решение $z(x, y)$ этого уравнения может быть представлено в форме

$$z(x, y) = f(y + ax). \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $z(x, y)$ как функцию $z(\xi, \eta)$ двух новых переменных ξ и η. Тогда, учитывая замену переменных (3) и вид искомой функции (4), получим для частных производных следующие выражения:

$$z_x = a_1 z_\xi + a_2 z_\eta; \quad z_{xy} = a_1 z_{\xi\xi} + (a_1 + a_2) z_{\xi\eta} + a_2 z_{\eta\eta};$$
$$z_{xx} = a_1^2 z_{\xi\xi} + 2a_1 a_2 z_{\xi\eta} + a_2^2 z_{\eta\eta}; \quad z_{yy} = z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}.$$

Используя найденные значения производных, представим уравнение (2) в виде

$$(Aa_1^2 + Ba_1 + C) z_{\xi\xi} + (2Aa_1a_2 + Ba_1 + Ba_2 + 2C) z_{\xi\eta} +$$
$$+ (Aa_2^2 + Ba_2 + C) z_{\eta\eta} = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим уравнение

$$Aa_i^2 + Ba_i + C = 0 \quad (i = 1, 2); \tag{6}$$

оно имеет два корня a_1 и a_2, которые могут быть действительными и различными, действительными и равными или комплексно сопряженными. Тип корней зависит от величины дискриминанта $B^2 - 4AC$.

В случае $B^2 - 4AC > 0$ корни a_1 и a_2 уравнения (6) действительны и различны, причем коэффициенты первого и третьего членов выражения (5) равны нулю. При этом равенство (5) имеет вид *канонической формы гиперболического дифференциального уравнения в частных производных*

$$z_{\xi\eta} = 0, \tag{7}$$

или

$$z_{\xi\eta} = f_g(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta), \tag{7'}$$

соответствующей выражению (1).

Перейдем к построению канонической формы дифференциального уравнения эллиптического типа. Если $B^2 - 4AC = 0$, то оба корня a_1 и a_2 уравнения (6) — действительные числа и переменные ξ и η являются зависимыми. Положим один из корней равным $a_1 = -B/(2A)$; тогда a_2 может быть произвольным, причем $a_1 \neq a_2$. Подставляя a_1 и a_2 в соотношение (5), получим

$$z_{\eta\eta} = 0. \tag{8}$$

Выражение (8) является *канонической формой параболического дифференциального уравнения в частных производных*. В общем случае его можно записать в виде

$$z_{\eta\eta} = f_p(\xi, \eta, z_\xi, z_\eta). \tag{8'}$$

Если $B^2 - 4AC < 0$, то a_1 и a_2 являются комплексно сопряженными: $a_1 = b_1 + ib_2$, $a_2 = b_1 - ib_2$. Тогда равенство (5) принимает вид

$$z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0. \tag{9}$$

Выражение (9) является *канонической формой дифференциального уравнения эллиптического типа.* В общем случае уравнение (9) можно записать так:

$$z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = f_e(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta). \tag{9'}$$

Классическими примерами дифференциальных уравнений в частных производных являются *уравнение Лапласа*

$$z_{xx} + z_{yy} = 0 \tag{10}$$

(имеющее каноническую эллиптическую форму), *уравнение теплопроводности*

$$z_{xx} = z_y \tag{11}$$

(имеющее каноническую параболическую форму) и *волновое уравнение*

$$z_{xx} = z_{yy} \tag{12}$$

(имеющее каноническую гиперболическую форму).

§ 10.2. Конечно-разностные аппроксимации

Конечно-разностные аппроксимации для частных производных являются наиболее распространенным подходом к численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных. Частные производные заменяются соответствующими разностными соотношениями по соответствующим независимым переменным. В общем случае размерность области, в которой необходимо найти решение дифференциального уравнения в частных производных, равна числу независимых переменных. В случае двух независимых переменных x и y область является двумерной. Метод, используемый для конечно-разностной аппроксимации, основывается на покрытии области сетью прямоугольных клеток шириной h (в направлении оси Ox) и высотой k (в направлении оси Oy). Величина зависимой переменной $z = z(x, y)$ устанавливается в любой точке в пределах области. В частности, когда задана одна точка прямоугольной сети с координатами x_r, y_s, окружающие ее четыре точки имеют координаты x_{r+h}, y_s; x_{r-h}, y_s; x_r, y_{s+k}; x_r, y_{s-k}. Геометрический способ покрытия области сеткой показан на рис. 10.1.

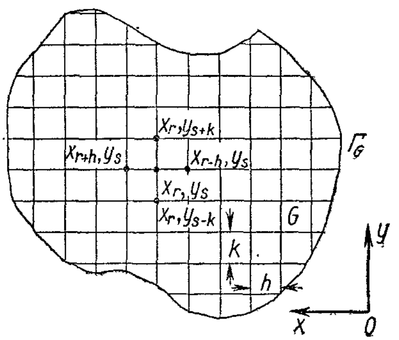


Рис. 10.1

Введём следующие операторы: E — *оператор приращения*; δ — *оператор центральных разностей*; Δ — *разностный оператор опережения*; D — *дифференциальный оператор*.

Эти операторы определяются следующими соотношениями:

$$Ef(x) = f(x+h), \tag{1}$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \tag{2}$$

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x), \tag{3}$$

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right). \tag{4}$$

Представим $f(x+h)$ в виде разложения в ряд Тейлора:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots \ . \tag{5}$$

Используя оператор D, представим оператор E в виде

$$Ef(x) = \left(1 + \frac{hD}{1!} + \frac{h^2D^2}{2!} + \ldots\right) f(x), \tag{6}$$

или, пользуясь разложением экспоненциальной функции e^{hD} в ряд Тейлора, преобразуем выражение (6) так:

$$Ef(x) = e^{hD} f(x). \tag{6'}$$

Тогда зависимость оператора E от D может быть представлена в форме

$$E = e^{hD}, \tag{7}$$

или

$$hD = \ln E. \tag{8}$$

Из выражений (1) и (2) получаем следующее соотношение между операторами E и Δ:

$$\Delta f(x) = Ef(x) - f(x), \tag{9}$$

или

$$E = \Delta + 1. \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в формулу (8), получим

$$hD = \ln(1 + \Delta). \tag{11}$$

Используя разложение логарифмической функции в ряд:

$$\ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \ldots, \tag{12}$$

получим следующее выражение для оператора D:

$$D = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \ldots\right). \tag{13}$$

Распространяя изложенный метод на разности второго порядка, имеем

$$(hD)^2 = [\ln(1+\Delta)]^2, \tag{14}$$

или

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \frac{137}{180}\Delta^6 - \dots\right). \qquad (15)$$

В формулах (13) и (15) можно ограничиться подходящим числом членов, чтобы получить конечно-разностное представление для производной с желаемой точностью. Ограничиваясь в каждом выражении первой и второй разностью для производных:

$$\frac{dz_r}{dx} = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots\right), \qquad (16)$$

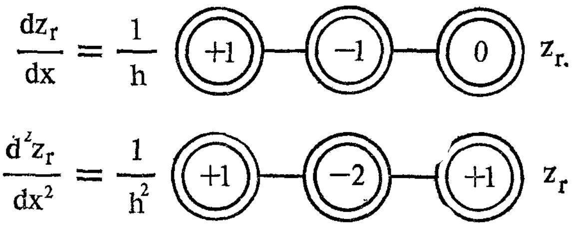
$$\frac{d^2 z_r}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \dots\right), \qquad (17)$$

имеем соответственно

$$\frac{dz_r}{dx} = \frac{z_{r+1} - z_r}{h} + O(h), \qquad (18)$$

$$\frac{d^2 z_r}{dx^2} = \frac{z_{r+1} - 2z_r + z_{r-1}}{h^2} + O(h^2). \qquad (19)$$

Для наглядного представления уравнений вида (18) и (19) используют шаблоны, имеющие следующий вид:



В приведенных шаблонах в центре кругов указываются коэффициенты дифференциального уравнения. Круг центральной части шаблона соответствует величине z_r. Положительным приращениям по горизонтальным линиям (рис. 10.1) соответствует левый конец, отрицательным — правый конец шаблона.

Аналогичные шаблоны можно получить и в случае использования оператора δ центральных разностей. Полагая в соотношении (6) значения переменной равными $x + h/2$ и $x - h/2$, имеем

$$Ef\left(x + \frac{h}{2}\right) = \left[1 + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)D}{1!} + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 D^2}{2!} + \dots\right] f(x) = e^{hD/2} f(x), \qquad (20)$$

$$Ef\left(x - \frac{h}{2}\right) = \left[1 + \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)D}{1!} + \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^2 D^2}{2!} + \dots\right] f(x) = e^{-hD/2} f(x). \qquad (20')$$

Поэтому, пользуясь соотношением (4), получаем

$$\delta f(x) = (e^{hD/2} - e^{-hD/2}) f(x) \tag{21}$$

или в операторном виде

$$\delta = e^{hD/2} - e^{-hD/2} = 2\operatorname{sh}(hD/2), \tag{22}$$

т. е.

$$hD = 2 \operatorname{arcsh}(\delta/2). \tag{23}$$

Разлагая гиперболическую функцию arcsh (δ/2) в ряд, имеем

$$hD = 2\left[\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{\delta}{2}\right)^5 + \ldots\right] =$$
$$= \left(\delta - \frac{1}{24}\delta^3 + \frac{3}{640}\delta^5 + \ldots\right). \tag{24}$$

Непосредственным возведением в степень получим

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \ldots\right), \tag{25}$$

$$D^4 = \frac{1}{h^4}\left(\delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7}{240}\delta^8 - \ldots\right). \tag{25'}$$

Соотношения для производных, выраженных через центральные разности, можно записать так:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_r}{dx} &= \frac{1}{h}\left(\delta - \frac{1}{24}\delta^3 + \frac{3}{640}\delta^5 - \ldots\right) z_r,\\
\frac{d^2 z_r}{dx^2} &= \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \ldots\right) z_r,\\
\frac{d^4 z_r}{dx^4} &= \frac{1}{h^4}\left(\delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7}{240}\delta^8 - \ldots\right) z_r.
\end{aligned} \tag{26}$$

Ограничиваясь в выражениях для производных первыми и вторыми центральными разностями, находим

$$\begin{aligned}
\frac{dz_r}{dx} &= \frac{z_{r+1} - z_{r-1}}{2h} + O(h^2),\\
\frac{dz_r}{dx} &= \frac{-z_{r+2} + 8z_{r+1} - 8z_{r-1} + z_{r-2}}{12h} + O(h^4),\\
\frac{d^2 z_r}{dx^2} &= \frac{z_{r+1} - 2z_r + z_{r-1}}{h^2} + O(h^2),\\
\frac{d^2 z_r}{dx^2} &= \frac{-z_{r+2} + 16z_{r+1} - 30z_r + 16z_{r-1} - z_{r-2}}{12h^2} + O(h^4),\\
\frac{d^4 z_r}{dx^4} &= \frac{z_{r+2} - 4z_{r+1} + 6z_r - 4z_{r-1} + z_{r-2}}{h^4} + O(h^2).
\end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим применение изложенного выше подхода для конечно-разностной аппроксимации частных производных. Для функции

$z = z(x, y)$ используем следующее обозначение для значений в узлах сетки x_r, y_s:

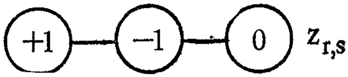
$$z_{r,s} = z(x_r, y_s). \tag{28}$$

Поскольку $\frac{\partial z}{\partial x}$ означает производную от z по x при постоянном y, получаем

$$\frac{\partial z_{r,s}}{\partial x} = \frac{1}{h}(z_{r+1,s} - z_{r,s}); \tag{29}$$

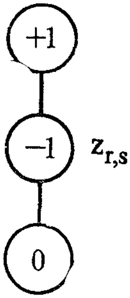
при этом вычислительный шаблон имеет вид

$$\frac{\partial z_{r,s}}{\partial x} = \frac{1}{h}$$



Вычислительный шаблон содержит только горизонтальные элементы, поскольку s (или y) является постоянной. Аналогично получаем

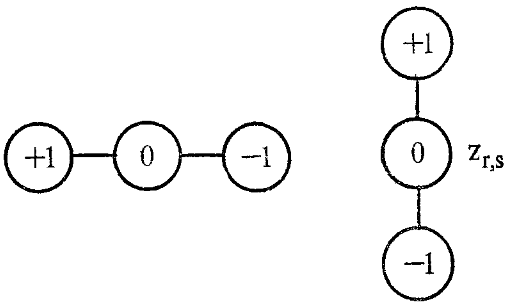
$$\frac{\partial z_{r,s}}{\partial y} = \frac{1}{k}$$



для производной в направлении s.

Смешанная производная получается аналогично:

$$\frac{\partial^2 z_{r,s}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4hk}$$



Умножением отдельных элементов строки на каждый элемент столбца получим

$$\frac{\partial^2 z_{r,s}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4hk} \left[\begin{array}{ccc} +1 & & -1 \\ & 0 & \\ -1 & & +1 \end{array}\right] z_{r,s}$$

Здесь все нулевые члены, за исключением центрального, опущены.

Рассмотрим наиболее часто используемые вычислительные шаблоны ($h = k$):

$$\frac{\partial z_{r,s}}{\partial x} = \frac{1}{2h} \left[\begin{array}{ccc} +1 & 0 & -1 \end{array}\right] z_{r,s} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial z_{r,s}}{\partial x} = \frac{1}{h} \left[\begin{array}{ccc} +1 & -1 & 0 \end{array}\right] z_{r,s} + O(h)$$

$$\frac{\partial z_{r,s}}{\partial x} = \frac{1}{2h} \left[\begin{array}{ccccc} -1 & +4 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] z_{r,s} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial z_{r,s}}{\partial x} = \frac{1}{12h} \left[\begin{array}{ccccc} -1 & +8 & 0 & -8 & +1 \end{array}\right] z_{r,s} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 z_{r,s}}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left[\begin{array}{ccc} +1 & -2 & +1 \end{array}\right] z_{r,s} + O(h^2) \qquad (*)$$

$$\frac{\partial^2 z_{r,s}}{\partial x^2} = \frac{1}{12h^2} \left[\begin{array}{ccccc} -1 & +16 & -30 & +16 & -1 \end{array}\right] z_{r,s} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^4 z_{r,s}}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4} \left[\begin{array}{ccccc} +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \end{array}\right] z_{r,s} + O(h^4)$$

$$\frac{\partial^2 z_{r,s}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4h^2} \left[\begin{array}{ccc} +1 & & -1 \\ & 0 & \\ -1 & & +1 \end{array}\right] z_{r,s} + O(h^2)$$

§ 10.3. Аппроксимация эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных

В качестве иллюстрации численных методов решения уравнений эллиптического типа рассмотрим двумерное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Это уравнение представляет установившийся режим теплопроводности через двумерное тело. Предполагается, что уравнение (1) выполняется внутри области R, окруженной границей B. Задача состоит в определении $z(x, y)$, причем граничные условия на границе B заданы. Для упрощения сначала рассмотрим границу B в виде квадрата со стороной, равной L. Имеются три возможные способа задания величины z на границе B.

Первый способ:

$$\begin{gathered} z=f_1(y),\ x=0;\ z=f_2(y),\ x=L; \\ z=g_1(x),\ y=0;\ z=g_2(x),\ y=L, \end{gathered} \tag{2}$$

где f_1, f_2, g_1, g_2 — произвольные функции.

Задача нахождения решения уравнения (1) с граничными условиями (2) называется *задачей Дирихле*.

Второй способ:

$$\begin{gathered} \frac{\partial z}{\partial x}=f_1(y),\ x=0;\ \frac{\partial z}{\partial x}=f_2(y),\ x=L; \\ \frac{\partial z}{\partial y}=g_1(x),\ y=0;\ \frac{\partial z}{\partial y}=g_2(x),\ y=L. \end{gathered} \tag{3}$$

Задача нахождения решения уравнения (1) с граничными условиями (3) называется *задачей Неймана*.

Третий способ:

$$a_1\frac{\partial z}{\partial x}+a_2 z=a_3, \quad b_1\frac{\partial z}{\partial y}+b_2 z=b_3. \tag{4}$$

Этому способу соответствует смешанный тип граничных условий (4), которые при специальном выборе значений коэффициентов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 сводятся к условиям (2) и (3).

Для любого граничного условия, указанного выше, искомая функция определена на границе B и удовлетворяет уравнению Лапласа в пределах области, ограниченной границей B. Решение уравнения Лапласа может быть получено аналитически, однако здесь будут использованы только численные методы. Далее рассматриваются обобщения уравнений эллиптического типа, которые не могут быть решены аналитически, но могут быть решены численно с использованием излагаемых методов решения.

После того как поставлена некоторая краевая задача типа (1) с граничными условиями одного из трех типов, необходимо, во-первых, установить систему уравнений, аппроксимирующую дифференциальное уравнение эллиптического типа и граничное условие, во-вторых,

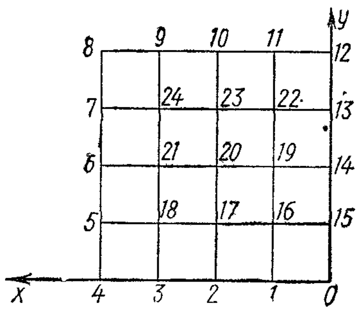
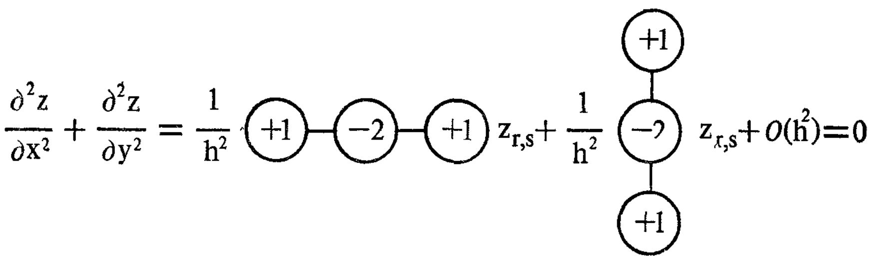


Рис 10.2

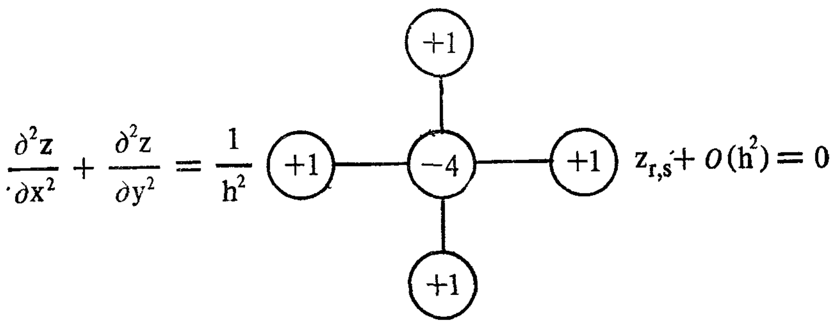
определить метод решения этой системы и, наконец, определить ошибку между решением аппроксимирующей системы уравнений и точным решением поставленной задачи. Рассмотрим способы решения поставленных вопросов.

На рис. 10.2 показана сеть ($h = k$), покрывающая область R и включающая границу B. Нижняя правая точка имеет координаты x_0, y_0 и величина z равна $z\ (x_0,\ y_0)$, или z_0. Величины z в граничных узловых точках и во внутренних узловых точках обозначены через z_1, z_2, ..., z_{23}, z_{24}. Для задачи Дирихле величины z_0, z_1, ..., z_{14}, z_{15}, соответствующие значениям функции на границе, известны и необходимо вычислить z_{16}, z_{17}, ..., z_{23}, z_{24} так, чтобы было удовлетворено уравнение Лапласа.

Имеется значительное число возможных конечно-разностных представлений для уравнения Лапласа. Наиболее часто используются шаблоны



или



В виде уравнения последнее соотношение можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{h^2}(z_{r,\,s+1} + z_{r,\,s-1} + z_{r+1,\,s} + z_{r-1,\,s} - 4z_{r,\,s}) + O\,(h^2) = 0. \tag{5}$$

§ 10.4. Решение разностных уравнений для эллиптических дифференциальных уравнений

После того как конечно-разностная аппроксимация для эллиптического дифференциального уравнения известна [т. е. для уравнения *Лапласа получено соотношение* (5) § 10.3], следующей задачей является эффективное решение аппроксимирующих алгебраических уравнений. В этом случае для задачи Дирихле имеем такую систему:

$$\begin{cases} z_{r+1,s}+z_{r-1,s}+z_{r,s+1}+z_{r,s-1}-4z_{r,s}=0 \text{ внутри } R, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad z_{r,s}=b_{r,s} \text{ на границе } B. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $b_{r,s}$ являются известными граничными условиями.

Пусть N — число внутренних узловых точек в строке и $N+1$ — число интервалов в строке. Как и прежде, интересующей областью является квадрат. Простейшим итерационным методом решения системы уравнений является *метод Ричардсона*, в котором вычисления проводятся согласно формулам

$$z_{r,s}^{(n+1)}=\begin{cases} \frac{1}{4}\left(z_{r+1,s}^{(n)}+z_{r-1,s}^{(n)}+z_{r,s+1}^{(n)}+z_{r,s-1}^{(n)}\right), & z_{r,s}\in R, \\ b_{r,s} & , z_{r,s}\in B. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначения $z_{r,s}^{(n)}$ и $z_{r,s}^{(n+1)}$ соответствуют n-й и $(n+1)$-й аппроксимациям в итерационном процессе. Начиная с допустимых величин $z_{r,s}^{(0)}$ во внутренних узловых точках и известных величин в граничных точках, выражение (2) используется для сглаживания влияния первоначально выбранных точек $z_{r,s}^{(0)}$ и для вычисления нового набора точек $z_{r,s}^{(1)}$. Процесс вычислений является итерационным.

Для окончания процесса вычислений требуется выполнение условия $|z_{r,s}^{(n+1)}-z_{r,s}^{(n)}|\leqslant\varepsilon$ для всех r и s, где ε — заданная заранее погрешность вычислений. Когда это условие выполняется, итерационный процесс сходится к решению конечно-разностной аппроксимации уравнения Лапласа с заданными граничными условиями. Это верно для выбранной величины h, использованной для построения сети.

Пример 1. Найти решение уравнения Лапласа для квадрата при граничных условиях, указанных на рис. 10.3.

Р е ш е н и е. Составим систему конечно-разностных уравнений, используя вычислительный шаблон (*); см стр. 346. По формулам (2) имеем

$$z_{11}=\frac{1}{4}(z_{21}+29{,}34+z_{12}+12{,}38), \qquad z_{12}=\frac{1}{4}(z_{22}+26{,}15+0{,}00+z_{11}),$$

$$z_{21}=\frac{1}{4}(38{,}53+z_{11}+z_{22}+30{,}10), \qquad z_{22}=\frac{1}{4}(16{,}18+z_{12}+0{,}00+z_{21}).$$

Полученная система четырех уравнений с четырьмя неизвестными z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} может быть записана в виде

$$\begin{cases} z_{11}-0{,}25z_{12}-0{,}25z_{21} = 8{,}43, \\ -0{,}25z_{11}+z_{12}-0{,}25z_{22}= 6{,}748, \\ -0{,}25z_{11}+z_{21}-0{,}25z_{22}=17{,}168, \\ -0{,}25z_{12}-0{,}25z_{21}+z_{22}= 4{,}045. \end{cases}$$

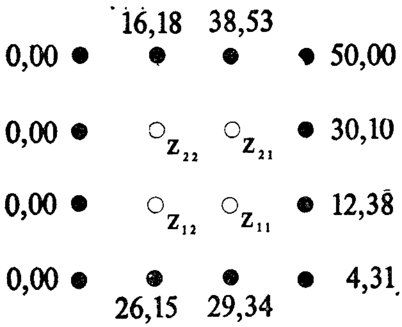


Рис. 10.3

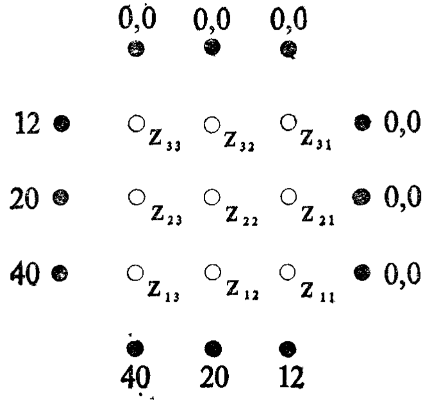


Рис. 10.4

Решение указанной системы методом последовательных исключений дает следующие значения неизвестных:

$$z_{11} = 20{,}53;\ z_{12} = 15{,}20;\ z_{21} = 29{,}09;\ z_{22} = 14{,}12.$$

При применении вычислительного шаблона (*) остались неиспользованными данные в угловых точках границы квадрата, однако эти значения необходимы при использовании вычислительных шаблонов других типов.

Пример 2. Найти решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ при граничных условиях, указанных на рис. 10.4.

Р е ш е н и е. Вычисление начального приближения проводится путем интерполирования граничных значений на внутренние узлы. При интерполировании предполагается, что значения искомой функции линейно убывают или возрастают от одной границы до другой. Используются следующие расчетные формулы:

$$z_{ij} = z_{ij_\text{н}} + \frac{z_{ij_\text{к}} - z_{ij_\text{н}}}{j_\text{к} - j_\text{н}} (j - j_\text{н})$$

(для строк) и

$$z_{ij} = z_{i_\text{н} j} + \frac{z_{i_\text{к} j} - z_{i_\text{н} j}}{i_\text{к} - i_\text{н}} (i - i_\text{н})$$

(для столбцов). Индексы $i_\text{н}$, $j_\text{н}$ и $i_\text{к}$, $j_\text{к}$ означают начальные и конечные значения. Начальному значению соответствует правый нижний угол таблицы. Для рассматриваемого примера $j_\text{н} = 0$, $j_\text{к} = 4$. Вычисления начинаем с первой строки сверху. Будем считать, что функция линейно возрастает от $z_{ij_\text{н}} = z_{30} = 0$ до $z_{ij_\text{к}} = z_{34} = 12$. Имеем

$$z_{34} = 0 + \frac{12}{4-0}(4-0) = 12; \qquad z_{33} = 0 + \frac{12}{4-0}(3-0) = 9;$$

$$z_{32} = 0 + \frac{12}{4-0}(2-0) = 6; \qquad z_{31} = 0 + \frac{12}{4-0}(1-0) = 3.$$

Переходим к правому столбцу: здесь $z_{i_н\, j}=z_{41}=0$; $z_{i_к\, j}=z_{01}=12$; далее

$$z_{31}=3+\frac{9}{0-3}(3-3)=3;\qquad z_{21}=3+\frac{9}{0-3}(2-3)=6;$$

$$z_{11}=3+\frac{9}{0-3}(1-3)=9;\qquad z_{01}=3+\frac{9}{0-3}(0-3)=12.$$

Затем рассматриваем вторую строку, считая, что функция линейно возрастает от $z_{ij_н}=z_{21}=6$ до $z_{ij_к}=z_{24}=20$. Тогда

$$z_{24}=6+\frac{14}{4-1}(4-1)=20;\qquad z_{23}=6+\frac{14}{4-1}(3-1)=15{,}33;$$

$$z_{22}=6+\frac{14}{4-1}(2-1)=10{,}66;\qquad z_{21}=6+\frac{14}{4-1}(1-1)=6.$$

Переходим ко второму столбцу, принимая $z_{i_н j}=z_{22}=10{,}66$ и $z_{i_к j}=z_{02}=20$. Имеем

$$z_{12}=10{,}66+\frac{20-10{,}66}{4-2}(3-2)=15{,}33.$$

Наконец, находим z_{13}, считая $z_{ij_н}=z_{12}=15{,}33$ и $z_{ij_к}=z_{1\lambda}=40$:

$$z_{13}=15{,}33+\frac{40-15{,}33}{4-2}(3-2)=27{,}67.$$

После определения указанным способом всех значений во внутренних узлах процесс построения начального приближения заканчивается.

На следующем этапе в итерационном процессе определения последовательных приближений используются расчетные формулы

$$z_{11}^{(n+1)}=\frac{1}{4}\left(z_{21}^{(n)}+z_{01}^{(n)}+z_{12}^{(n)}+z_{10}^{(n)}\right);\qquad z_{21}^{(n+1)}=\frac{1}{4}\left(z_{31}^{(n)}+z_{11}^{(n)}+z_{22}^{(n)}+z_{20}^{(n)}\right);$$

$$z_{12}^{(n+1)}=\frac{1}{4}\left(z_{22}^{(n)}+z_{11}^{(n)}+z_{02}^{(n)}+z_{13}^{(n)}\right);\qquad z_{22}^{(n+1)}=\frac{1}{4}\left(z_{32}^{(n)}+z_{12}^{(n)}+z_{23}^{(n)}+z_{21}^{(n)}\right);$$

$$z_{13}^{(n+1)}=\frac{1}{4}\left(z_{23}^{(n)}+z_{03}^{(n)}+z_{14}^{(n)}+z_{12}^{(n)}\right);\qquad z_{23}^{(n+1)}=\frac{1}{4}\left(z_{33}^{(n)}+z_{13}^{(n)}+z_{24}^{(n)}+z_{22}^{(n)}\right);$$

$$z_{31}^{(n+1)}=\frac{1}{4}\left(z_{41}^{(n)}+z_{21}^{(n)}+z_{32}^{(n)}+z_{30}^{(n)}\right);$$

$$z_{32}^{(n+1)}=\frac{1}{4}\left(z_{42}^{(n)}+z_{22}^{(n)}+z_{33}^{(n)}+z_{31}^{(n)}\right);$$

$$z_{33}^{(n+1)}=\frac{1}{4}\left(z_{43}^{(n)}+z_{23}^{(n)}+z_{34}^{(n)}+z_{32}^{(n)}\right).$$

Решение примера проведено двумя способами: методом простой итерации и методом Зейделя. Последовательные приближения по методу простой итерации приведены в табл. 10.1, а по методу Зейделя — в табл. 10.2 (см. стр 352). Расчет по методу Зейделя требует шести итераций, что на две итерации меньше, чем в методе простой итерации. Вычисления заканчиваются, когда значения в последовательных итерациях совпадают с заданной точностью ($\varepsilon=0{,}1$).

Анализ полученных результатов показывает, что таблицы 10.1 и 10.2 симметричны относительно своих побочных диагоналей из-за специального симметричного вида граничных условий.

Таблица 10.1

	0,0	0,0	0,0	
12	8,74	5,79	2,88	0,0
20	17,22	11,46	5,79	0,0
40	28,59	17,22	8,74	0,0
	40	20	12	

Таблица 10.2

	0,0	0,0	0,0	
12	8,72	5,76	2,88	0,0
20	17,19	11,47	5,76	0,0
40	28,58	17,19	8,72	0,0
	40	20	12	

§ 10.5. Влияние криволинейных граничных условий

В более общем случае граница B является криволинейной, а не квадратом или прямоугольником. На рис. 10.5 изображена типичная криволинейная граница с квадратной сетью, наложенной на эту границу. Величины P_1h, P_3h, P_5h и P_6h представляют расстояния от узла 0 до границы или прилежащей точки. Как указано на рис. 10.5, величины P_5 и P_6 меньше 1, а P_1 и P_3 равны 1. В последующем изложении величины P_1 и P_3 также могут принимать значения, меньшие чем 1.

Рассмотрим сначала рис. 10.5 с точки зрения решения задачи Дирихле. Здесь z_5 и z_6 заданы, z_2 и z_4 — значения функции в фиктивных (так называемых нерегулярных) узлах за пределами границы.

Разложение функций $z(x_0+\alpha, y_0)$ и $z(x_0, y_0+\beta)$ в ряд Тейлора в окрестности x_0, y_0 дает:

$$z(x_0+\alpha, y_0)=z(x_0, y_0)+\alpha z_x(x_0, y_0)+\frac{\alpha^2}{2!}z_{xx}(x_0, y_0)+$$
$$+\frac{\alpha}{3!}z_{xxx}(x_0, y_0)+\ldots;$$
$$z(x_0, y_0+\beta)=z(x_0, y_0)+\beta z_y(x_0, y_0)+\frac{\beta^2}{2!}z_{yy}(x_0, y_0)+$$
$$+\frac{\beta^3}{3!}z_{yyy}(x_0, y_0)+\ldots.$$

Если положим $\alpha = P_5h$ и затем $\alpha = -P_1h$ в первом уравнении, $\beta = P_6h$ и затем $\beta = -P_3h$ во втором уравнении, то ограничиваясь в этих уравнениях членами, содержащими вторые производные, с погрешностью $O(h^2)$ имеем:

$$\begin{aligned}
&z(x_0+P_5h, y_0)=z(x_0, y_0)+P_5hz_x(x_0, y_0)+\frac{(P_5h)^2}{2}z_{xx}(x_0, y_0);\\
&z(x_0-P_5h, y_0)=z(x_0, y_0)-P_1hz_x(x_0, y_0)+\frac{(P_1h)^2}{2}z_{xx}(x_0, y_0),\\
&z(x_0, y_0+P_6h)=z(x_0, y_0)+P_6hz_y(x_0, y_0)+\frac{(P_6h)^2}{2}z_{yy}(x_0, y_0),\\
&z(x_0, y_0-P_3h)=z(x_0, y_0)-P_3hz_y(x_0, y_0)+\frac{(P_3h)^2}{2}z_{yy}(x_0, y_0).
\end{aligned} \tag{1}$$

Из первых двух уравнений (1) величина $z_x(x_0, y_0)$ может быть исключена, при этом

$$z_{xx}(x_0, y_0) = \frac{2}{h^2} \frac{1}{P_5^2 + P_5 P_1} \left[z_5 - z_0 \left(1 + \frac{P_5}{P_1} \right) + \frac{P_5}{P_1} z_1 \right].$$

Аналогично, используя последние два уравнения (1), получим

$$z_{yy}(x_0, y_0) = \frac{2}{h^2} \frac{1}{P_6^2 + P_6 P_3} \left[z_6 - z_0 \left(1 + \frac{P_6}{P_3} \right) + \frac{P_6}{P_3} z_3 \right].$$

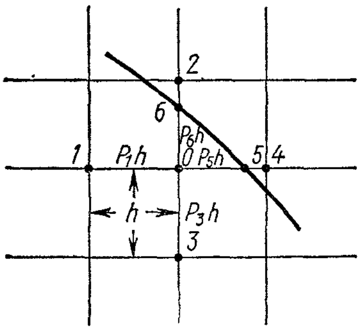


Рис. 10.5

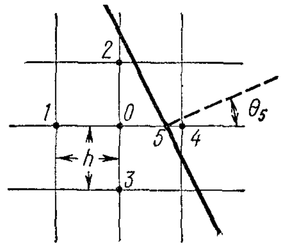


Рис. 10.6

Складывая полученные выражения, имеем

$$z_{xx} + z_{yy} \Big|_{x_0,\, y_0} = \frac{2}{h^2} \left\{ \frac{1}{P_5^2 + P_5 P_1} \left[z_5 - z_0 \left(1 + \frac{P_5}{P_1} \right) + \frac{P_5}{P_1} z_1 \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{P_6^2 + P_6 P_3} \left[z_6 - z_0 \left(1 + \frac{P_6}{P_3} \right) + \frac{P_6}{P_3} z_3 \right] \right\} = 0. \qquad (2)$$

В случае $P_1 = P_3 = 1$ выражение (2) приводится к виду

$$z_{xx} + z_{yy} \Big|_{x_0,\, y_0} = \frac{2}{h^2} \left[\frac{1}{P_5 + 1} z_1 + \frac{1}{P_6 + 1} z_3 + \frac{1}{P_5 (P_5 + 1)} z_5 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{P_6 (P_6 + 1)} z_6 - \frac{P_6 + P_5}{P_5 P_6} z_0 \right] + O(h^2) = 0. \qquad (3)$$

Для $P_5 = P_6 = 1$ в случае квадратной границы это выражение приводится к виду

$$z_{xx} + z_{yy} \Big|_{x_0,\, y_0} = \frac{1}{h^2} (z_1 + z_3 + z_6 - 4z_0).$$

Алгебраические преобразования уравнения (3) дают следующее уравнение:

$$P_5 P_6 (P_6 + 1) z_1 + P_5 P_6 (P_5 + 1) z_3 + P_6 (P_6 + 1) z_5 +$$
$$+ P_5 (P_5 + 1) z_6 - (P_5 + 1)(P_6 + 1)(P_6 + P_5) z_0 = 0. \qquad (4)$$

Отметим, что уравнение (2) является уравнением более общим, чем (4), так как в него включены значения функции на границе и коэффициенты P_1, P_3, P_5 и P_6. Теперь процесс решения уравнения Лапласа состоит в данном случае в использовании уравнения (4) для всех точек, не прилежащих к границе, и уравнения (2) с соответствующим выбором величин P_1, P_3, P_5 и P_6 для точек, прилежащих к границе. В остальном решение проводится аналогично решению задачи для случая квадратной границы.

Для задачи Неймана используется подобная, однако более усложненная последовательность действий. В качестве иллюстрации может быть использован рис. 10.6; здесь на границе задается значение $\frac{\partial z}{\partial n} = f(x, y)$. Величина $\frac{\partial z}{\partial n}$ является градиентом по нормали от функции z на границе и имеет наклон θ_5 к горизонтали. В точке 5 имеем

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_5 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_5 \cos\theta_5 + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_5 \sin\theta_5. \qquad (5)$$

Пример. Найти приближенное решение уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, удовлетворяющее на окружности $x^2 + y^2 = 16$ (рис. 10.7) условию $z(x, y) = x^2 y^2$.

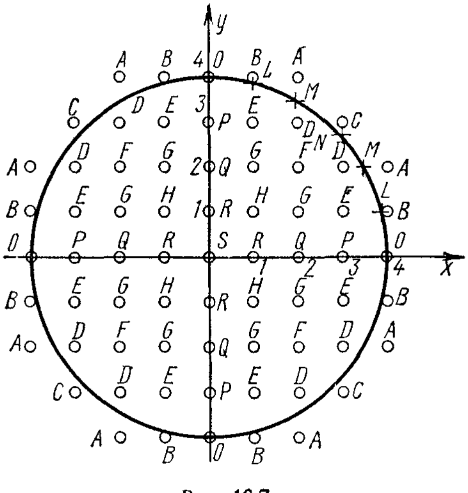


Рис. 10.7

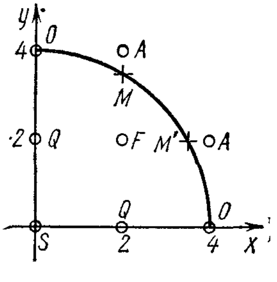


Рис. 10.8

Решение. Пользуясь симметрией заданных граничных условий, рассмотрим четверть круга (рис. 10.8). Для применения конечно-разностных методов необходимо иметь начальное приближение. Построение начального приближения проводим следующим образом.

Полагаем значения искомой функции в узлах сети, близких к границе, равными значениям этой функции на границе. Рассмотрим сначала крупную сеть с шагом $h = 2$ Для узла A при $x = 2$ из уравнения окружности имеем $y = \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$. Ближайшей к узлу A точкой границы является точка M $(2; \sqrt{12})$. Из граничного условия находим $z_A = z_M = x^2 y^2 \big|_{x=2,\, y=\sqrt{12}} = 48$.

Аналогично для узла A' имеем ближайшую точку M' $(\sqrt{12}; 2)$ со значением искомой функции на границе $z_{A'} = z_{M'} = x^2 y^2 \big|_{x=\sqrt{12},\, y=2} = 48$. При $x = 0$

или $y = 0$ значение функции на границе обращается в нуль, поэтому в узлах O' (4; 0) и O (0, 4) получаем $z_O = z_{O'} = 0$.

Для определения значений функции во внутренних узлах (см. рис. 10.7) имеем систему конечно-разностных уравнений

$$z_S = \frac{1}{4}(z_Q + z_Q + z_Q + z_Q), \qquad z_Q = \frac{1}{4}(z_O + z_S + z_F + z_F),$$
$$z_F = \frac{1}{4}(z_A + z_Q + z_Q + z_A),$$

откуда $z_S = 24$; $z_Q = 24$; $z_F = 36$.

Для повышения точности вычислений уменьшаем шаг до $h = 1$ и снова рассматриваем четверть круга, учитывая симметрию решений. Начальные значения искомой функции определяем, зная значения, полученные в узлах крупной сети, пользуясь симметрией решений и принимая значения в узлах, близких к границе, равными значениям функции на границе. Находим

$$z_A = z_{A'} = 48; \quad z_B = z_{B'} = 15; \quad z_C = z_{C'} = 63.$$

Для определения значений z_D, z_G, z_P, z_R используем уравнения

$$z_D = \frac{1}{4}(z_A + z_F + z_E + z_C), \qquad z_G = \frac{1}{4}(z_E + z_H + z_Q + z_F),$$
$$z_P = \frac{1}{4}(z_O + z_Q + z_E + z_E), \qquad z_R = \frac{1}{4}(z_Q + z_S + z_H + z_H).$$

Для определения значений искомой функции z_H и z_E используем конечно-разностные уравнения в виде

$$z_H = \frac{1}{4}(z_Q + z_Q + z_F + z_S), \qquad z_E = \frac{1}{4}(z_F + z_O + z_A + z_Q).$$

Подставляя числовые значения, имеем систему уравнений

$$z_D = \frac{1}{4}(48 + z_E + 63 + 36), \qquad z_R = \frac{1}{4}(24 + 24 + z_H + z_H),$$
$$z_G = \frac{1}{4}(z_E + z_H + 24 + 36), \qquad z_H = \frac{1}{4}(24 + 24 + 24 + 36),$$
$$z_P = \frac{1}{4}(z_E + z_E + 0 + 24), \qquad z_E = \frac{1}{4}(0 + 36 + 48 + 24).$$

Решение системы дает следующие значения:

$$z_G = 28{,}5; \quad z_D = 43{,}5; \quad z_E = 27; \quad z_H = 27; \quad z_P = 19{,}5; \quad z_R = 25{,}5.$$

Уточним значения искомой функции в граничных узлах B, A и C. Ограничиваясь в разложении Тейлора первой производной, имеем

$$z(x_0, y_0 + \delta h) = z(x_0, y_0) + \delta h z_y(x_0, y_0).$$

Заменяем значения $z_y(x_0, y_0)$ в точках L, M и N границы их значениями в узлах B, A и C:

$$z_B = z_L + \frac{z_E - z_L}{\delta_B - h}\delta_B, \qquad z_A = z_M + \frac{z_D - z_M}{\delta_A - h}\delta_A,$$
$$z_C = z_N + \frac{z_D - z_N}{\delta_C - h}\delta_C;$$

здесь δ_B, δ_A, δ_C — расстояния от точек границы L, M, N до ближайших узлов B, A, C. Получим следующие числовые значения:

$$\delta_B = |BL| = 4 - \sqrt{15} \approx 0{,}13; \qquad z_B = 14 - \frac{13}{0{,}87} \cdot 0{,}13 \approx 12;$$

$$\delta_A = |AM| = 4 - \sqrt{12} \approx 0{,}6; \qquad z_A = 48 + \frac{4{,}5}{0{,}4} \cdot 0{,}6 \approx 55;$$

$$\delta_C = |CN| = 3 - \sqrt{7} \approx 0{,}35; \qquad z_C = 63 + \frac{19{,}5}{0{,}65} \cdot 0{,}35 \approx 74.$$

Составляем таблицу начальных значений и методом простой итерации находим значения искомой функции до тех пор, пока значения, полученные в последовательных итерациях (см. табл. 10.3), не будут отличаться на величину последнего разряда. В табл. 10.4 приводятся для сравнения значения точного решения задачи

$$z(x, y) = x^2 y^2 + \frac{1}{8}[256 - (x^2 + y^2)].$$

Таблица 10.3

21	28	47	
27	30	38	47
28	29	30	28
28	28	27	21

Таблица 10.4

0	12	46		
22	28	47	73	
30	33	40	47	46
32	32	33	28	12
32	32	30	22	0

§ 10.6. Аппроксимация параболических и гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных

Так как основные особенности численного интегрирования дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типа являются сходными, то в настоящем разделе эти дифференциальные уравнения будут рассмотрены вместе. Классическим параболическим дифференциальным уравнением в частных производных является одномерное уравнение теплопроводности

$$\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial t}, \tag{1}$$

где $z = z(x, t)$; α — положительная постоянная; t — время; x — расстояние, причем интервал изменения x является ограниченным. Ограничение изменения x интервалом $(0, 1)$ является условным и может быть легко обобщено на интервал (a, b). Поскольку уравнение (1) является уравнением второго порядка в области пространственной переменной и первого порядка в области временной переменной, необходимо установить два условия для z в некоторый момент x и одно условие для z в некоторый момент t. Это может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} z(0,\ t) &= f_0(t),\ x = 0,\ t \geqslant 0, \\ z(1,\ t) &= f_1(t),\ x = 1,\ t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2}$$

и

$$z(x,\ 0) = g_0(x),\ t = 0,\ 0 < x < 1. \tag{3}$$

Функции $f_0(t)$, $f_1(t)$ и $g_0(x)$ являются обыкновенными аналитическими функциями.

Классическим гиперболическим уравнением в частных производных является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},\quad 0 < x < 1,\quad t \geqslant 0 \tag{4}$$

при том же обозначении переменных, что и в уравнении (1). Поскольку (1) является уравнением второго порядка по обеим независимым переменным, требуется два граничных и два начальных условия. Их можно задать следующим образом:

$$\begin{aligned} z(0,\ t) &= f_0(t),\ x = 0,\ t \geqslant 0; \\ z(1,\ t) &= f_1(t),\ x = 1,\ t \geqslant 0; \end{aligned} \tag{5}$$

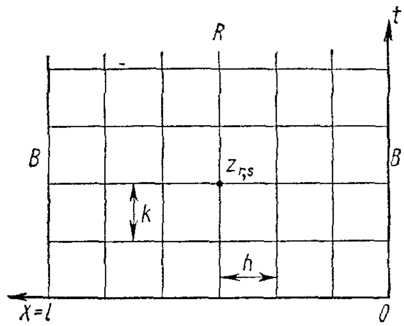


Рис. 10.9

$$z(x,0) = g_0(x),\quad t=0,\quad 0 < x < 1;\quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = g_1(x),\quad t=0,\quad 0 < x < 1. \tag{6}$$

Условия (5) и (6) можно заменить более общим градиентным условием, которое имеет форму

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 z = a_3,\quad x = 0\quad \text{или}\quad x = 1,\quad t \geqslant 0 \tag{7}$$

и при соответствующем выборе a_1, a_2, a_3 приводится к одному из видов (5) или (6).

В обоих рассматриваемых классах дифференциальных уравнений граница определена с трех сторон области $(x,\ t)$ и неограничена с четвертой стороны. Для постоянных значений $f_0(t)$ и $f_1(t)$ и постоянном $g_0(x)$, скажем, равном нулю, область и граница указаны на рис. 10.9. Задача состоит в определении $z(x,\ t)$ в области R при условиях на границе B. Для применения конечно-разностного метода область покрывается прямоугольной сетью с шагом h по направлению x и шагом k по направлению t. Узловой точке x_r, t_s соответствует значение функции

$$z(x_r, t_s) = z(rh, sk) = z_{r,\ s}.$$

Наиболее простое конечно-разностное представление параболического дифференциального уравнения в частных производных (1) использует формулу центральных разностей для z_{xx} и опережающую разность для z_t. Пользуясь соотношением (*) (см. стр. 346), имеем

$$\alpha z_{xx} - z_t = \alpha \frac{z_{r+1,\, s} - 2z_{r,\, s} + z_{r-1,\, s}}{h^2} - \frac{z_{r,\, s+1} - z_{r,\, s}}{k} = 0,$$

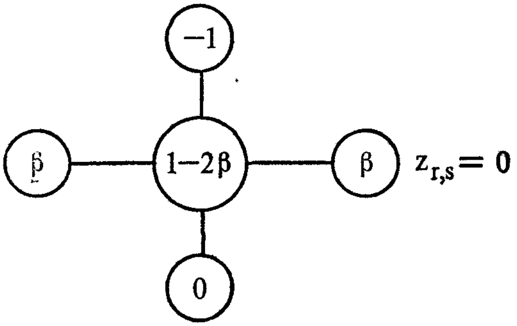
или

$$z_{r,\, s+} = z_{r,\, s} + \frac{\alpha k}{h^2}(z_{r+1,\, s} - 2z_{r,s}) + O(h^2) + O(k).$$

Обозначив $\beta = \alpha k/h^2$, получим

$$z_{r,\, s+1} = \beta z_{r+1,\, s} + (1 - 2\beta)\, z_{r,\, s} + \beta z_{r-1\, s}, \tag{8}$$

где $1 \leqslant r \leqslant N$ и $s \geqslant 1$. Уравнение (8) имеет вычислительный шаблон



В частном случае, когда $\beta = 1/2$, уравнение (8) принимает вид

$$z_{r,\, s+1} = \frac{1}{2}(z_{r+1,\, s} + z_{r-1,\, s}). \tag{9}$$

Соотношение (9) называется *формулой Шмидта.*

Граничные и начальные условия (2) и (3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} z_{0,\, s} &= f_0(sk), \quad s \geqslant 0, \\ z_{M,\, s} &= f_1(sk), \quad s \geqslant 0, \\ z_{r\ 0} &= g_0(rh), \quad 0 < r < M. \end{aligned} \tag{10}$$

Способ решения уравнений (8) и (10) следует из вышеизложенного для уравнений эллиптического типа. Начальные и граничные условия (10) определяют величины для всех граничных узлов. Уравнение (8) может быть использовано для вычисления всех $z_{r,s}$ в первой строке по значениям величины $z_{r,0}$. Это можно легко видеть из вычислительного шаблона, в котором величина $z_{r,s+1}$ следует из величин функции только на уровне s. Как только известна полная строка $z_{r,1}$, величина $z_{r,s}$ может быть вычислена с помощью уравнения (8) по известным граничным условиям и значениям величин $z_{r,1}$. Этот процесс может быть продолжен в области времени настолько, насколько это необходимо по условию задачи. Заметим, что процесс вычисления состоит в простом вычислении значений уровень за уровнем, с неизвестной z на $(s+1)$-м уровне, вычисляемой по полученному значению z на предыдущем s-м уровне. Программа вычислений этого процесса относительно проста и требования к памяти ограничены. Уравнение (8) называется явным.

Следует отметить, что основная задача состоит в вычислении значений функции $z_{r,s}$ в первой строке. Разрыв существует в условных точках $z_{0,0}$ и $z_{M,0}$, поскольку приближение к этим точкам в направлении x и в направлении t ведет к различным величинам. Это обычно компенсируется использованием средних арифметических значений функции в условных точках, соответствующих $x \to 0$ и $t \to 0$. В действительности значение функции в углах не используется в последующих вычислениях и поэтому не является особенно важным.

Пример. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial z}{\partial t}$, $0 < x < 1$, $0 \leqslant t \leqslant 0{,}01$, удовлетворяющее условиям

$$g_0(x) = (1{,}5\,x^2 + 2{,}2)\,e^{-x}; \quad f_0(t) = 2{,}2; \quad f_1(t) = 3{,}7\,e^{-1}$$

с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. Воспользуемся явной схемой (8) при $\beta = 1/6$. Выберем шаг по оси x равным $h = 0{,}1$. Так как $\alpha = 1$, $\beta = 1/6$, то по формуле $\beta = \alpha k/h^2$ находим шаг по оси t : $k = \beta h^2/\alpha = 0{,}01/6 \approx 0{,}0017$.

Записываем в таблицу начальные и граничные значения. Нулевой строке соответствуют граничные значения, левому столбцу — начальные условия. Формула (8) при $\beta = 1/6$ принимает вид

$$z_{r,\,s+1} = \frac{1}{6}\,(z_{r+1,\,s} + 4z_{r,\,s} + z_{r-1,\,s}).$$

Для первой строки имеем

$$z_{r,\,1} = \frac{1}{6}\,(z_{r+1,\,0} + 4z_{r,\,0} + z_{r-1,\,0}).$$

Подставляя числовые значения, находим

$$z_{11} = \frac{1}{6}\,(1{,}850 + 4\cdot 2{,}004 + 2{,}2) = 2{,}011;$$

$$z_{21} = \frac{1}{6}\,(1{,}730 + 4\cdot 1{,}850 + 2{,}004) = 1{,}856;$$

$$z_{31} = \frac{1}{6}\,(1{,}636 + 4\;1{,}730 + 1{,}850) = 1{,}734;$$

$$z_{41} = \frac{1}{6}\,(1{,}562 + 4\cdot 1{,}636 + 1{,}730) = 1{,}639;$$

$$z_{51} = \frac{1}{6}\,(1{,}504 + 4\cdot 1{,}562 + 1{,}636) = 1{,}564;$$

$$z_{61} = \frac{1}{6}\,(1{,}458 + 4\cdot 1{,}504 + 1{,}562) = 1{,}506;$$

$$z_{71} = \frac{1}{6}\,(1{,}420 + 4\cdot 1{,}458 + 1{,}504) = 1{,}459;$$

$$z_{81}=\frac{1}{6}(1,388+4\cdot 1,420+1,458)=1,420;$$

$$z_{91}=\frac{1}{6}(3,7e^{-1}+4\cdot 1,388+1,375)=1,368.$$

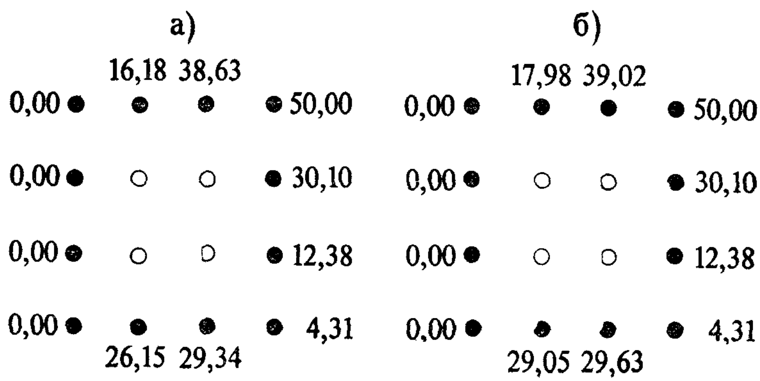
Для последующих строк при $t = 0,0033$; $0,0050$; $0,0067$ вычисления проводятся аналогично (см. табл. 10.5).

Таблица 10.5

t	z_{1j}	z_{2j}	z_{3j}	z_{4j}	z_{5j}	z_{6j}	z_{7j}	z_{8j}	z_{9j}
0,0067	2,025	1,872	1,748	1,649	1,572	1,512	1,463	1,424	1,391
0,0050	2,021	1,867	1,743	1,646	1,570	1,510	1,462	1,423	1,390
0,0033	2,017	1,861	1,739	1,642	1,567	1,508	1,460	1,422	1,390
0,0017	2,011	1,856	1,734	1,639	1,564	1,506	1,459	1,421	1,389
0,0000	2,004	1,850	1,730	1,636	1,562	1,504	1,457	1,420	1,388

Упражнения

1. Найти приближенное решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для квадрата при указанных граничных условиях:



Ответы:

а)

0,00	16,18	38,63	50,00
0,00	14,12	26,09	30,10
0,00	15,20	20,53	12,38
0,00	26,15	29,34	4,31

б)

0,00	17,98	39,02	50,00
0,00	15,18	36,39	30,10
0,00	16,37	21,26	12,38
0,00	29,05	29,63	4,31

2. Найти приближенное решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ с шагом $h=1/6$ для квадрата при указанных граничных условиях:

		9,81	19,78	29,12	40,16	42,31		
0,00	×	×	×	×	×	×	×	50,00
0,00	×	○	○	○	○	○	×	40,16
0,00	×	○	○	○	○	○	×	33,11
0,00	×	○	○	○	○	○	×	19,14
0,00	×	○	○	○	○	○	×	13,00
0,00	×	○	○	○	○	○	×	6,98
0,00	×	×	×	×	×	×	×	4,31
		17,28	31,96	40,00	30,50	17,28		

Ответ:

	9,81	19,78	29,12	40,16	42,31	
0,00	8,97	17,58	25,36	32,18	36,11	40,16
0,00	8,68	16,00	22,29	26,86	29,69	33,11
0,00	8,36	15,59	20,71	23,05	22,62	19,14
0,00	9,43	17,22	21,71	21,85	18,55	13,00
0,00	12,20	22,09	26,96	24,01	16,70	6,98
	17,28	31,96	40,00	30,50	17,28	

3. Найти приближенное решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ с шагом $h = 0,2$ в области $\{C\} : x^2 + (y+3)^2 \leqslant 1,6$, $y \geqslant 0$ при граничных условиях следующего вида:

$$z|_{y=0} = 0, \quad z|_C = 2y\,(2x^2 + 3y).$$

Ответ:

$y \diagup x$													
1,0	6,000	6,120	6,480										
0,8	5,088	5,184	5,472	5,952	6,624	7,488	8,544						
0,6	3,984	4,056	4,272	4,632	5,136	5,784	6,576	7,512	8,592				
0,4	2,736	2,784	2,800	3,168	3,504	3,936	4,464	5,088	5,808	6,624	7,536		
0,2	1,392	1,416	1,488	1,608	1,776	1,992	2,076	2,568	2,928	3,336	3,792	4,316	4,848
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$y \diagup x$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	

4. Найти приближенное решение уравнения $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial z}{\partial t}$, удовлетворяющее условиям $z(x,\ 0) = g_0(x)$, $z(0,\ t) = f_0(t)$, $z(1,\ t) = f_1(t)$ для значении $0 \leqslant t \leqslant T$, взяв по аргументу x шаг $h = 0{,}1$. Использовать уравнение (8) § 10.6.

а) $g_0(x) = (1{,}1x^2 + 1{,}1)\sin \pi x$, $f_0(t) = f_1(t) = 0$, $T = 0{,}02$, $\beta = 1/2$;

б) $g_0(x) = (1{,}1x^2 + 2{,}3)\, e^{-x}$; $f_0(t) = 2{,}3$; $f_1(t) = 3{,}4e^{-1}$; $T = 0{,}01$; $\beta = 1/6$.

Ответы:

а)

t	z_{1j}	z_{2j}	$_{3j}$	z_{4j}	z_{5j}	z_{6j}	z_{7j}	z_{8j}	z_{9j}
0,020	0,311	0,602	0,855	1,045	1,15	1,145	1,018	0,764	0,412
0,015	0,320	0,621	0,885	1,088	1,206	1,212	1,084	0,824	0,443
0,010	0,328	0,639	0,914	1,131	1,262	1,281	1,162	0,887	0,486
0,005	0,336	0,656	0,943	1,172	1,318	1,351	1,243	0,973	0,531
0,000	0,343	0,672	0,970	1,213	1,375	1,423	1,327	1,062	0,618

б)

t	z_{1j}	z_{2j}	z_{3j} .	z_{4j}	z_{5j}	z_{6j}	z_{7j}	z_{8j}	z_{9j}
0,0067	2,110	1,939	1,794	1,673	1,572	1,488	1,416	1,355	1,301
0,0050	2,106	1,934	1,789	1,670	1,570	1,486	1,415	1,354	1,300
0,0033	2,102	1,929	1,785	1,666	1,567	1,484	1,413	1,352	1,299
0,0017	2,097	1,924	1,781	1,663	1,564	1,482	1,411	1,351	1,798
0,0000	2,091	1,919	1,777	1,660	1,562	1,480	1,410	1,350	1,297

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. М., «Наука», 1964.

2. И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. I. М., Физматгиз, 1959.

3. И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. II. М., Физматгиз, 1962.

4. А. А. Гусак. Элементы методов вычислений. Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, Минск, 1974.

5. Р. С. Гутер и Б. В. Овчинский. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М., «Наука», 1970.

6. А. Н. Данилова и Г. Н. Семенова. Методическая разработка для проведения практических занятий по численным методам. Ленинград, Ленинградский радиополитехникум, 1971.

7. Б. П. Демидович и И. А. Марон. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970.

8. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. Численные методы анализа. М., «Наука», 1967.

9. И. А. Каплан. Практические занятия по высшей математике, ч. V, изд-во Харьковского Университета, Харьков, 1972.

10. Н. В. Копченова и И. А. Марон. Вычислительная математика в примерах и задачах. М., «Наука», 1972.

11. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М., «Наука», 1965.

12. Милн В. Э. Численное решение дифференциальных уравнений. ИЛ, 1955.

13. С. Б. Норкин, Р. Б. Берри, И. А. Жабин, Д. П. Полозков, М. И. Розенталь, Х. Р. Сулейманова. Элементы вычислительной математики. М., «Высшая школа», 1966.

14. Г. Н. Положий, Н. А. Пахарева и др. Математический практикум. М., Физматгиз, 1960.

15. Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.

16. М. П. Черкасова. Сборник задач по методам вычислений и элементам программирования. Минск, «Высшая школа», 1966.

17. М. П. Черкасова. Сборник задач по численным методам Минск, «Вышэйшая школа», 1967.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Данилина Нинель Ивановна
Дубровская Нинель Соломоновна
Кваша Ольга Петровна
Смирнов Георгий Леонидович
Феклисов Геннадий Иванович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Научный редактор В. М. Савицкий
Редактор А. М. Суходский
Художник А В Исиченко
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор Н. А. Битюкова
Корректор В. В. Кожуткина

Сдано в набор 15/IX—75 г. Подп. к печати 9/IV—76 г
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бум тип № 2. Объем 23 печ. л. Усл п л. 23. Уч.-изд. л. 22,46.
Изд. № ФМ-587. Тираж 44 000 экз. Заказ № 449. Цена 84 коп.
План выпуска литературы издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1976 г. Позиция № 240
Москва, К-51, Неглинная ул., д 29/14,
издательство «Высшая школа»

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Москва, И-41, Б Переяславская, д. 46